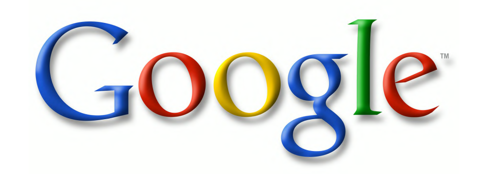
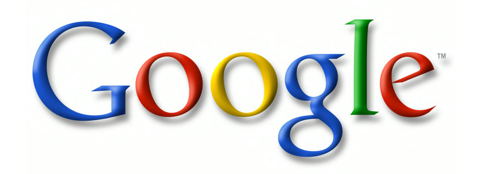
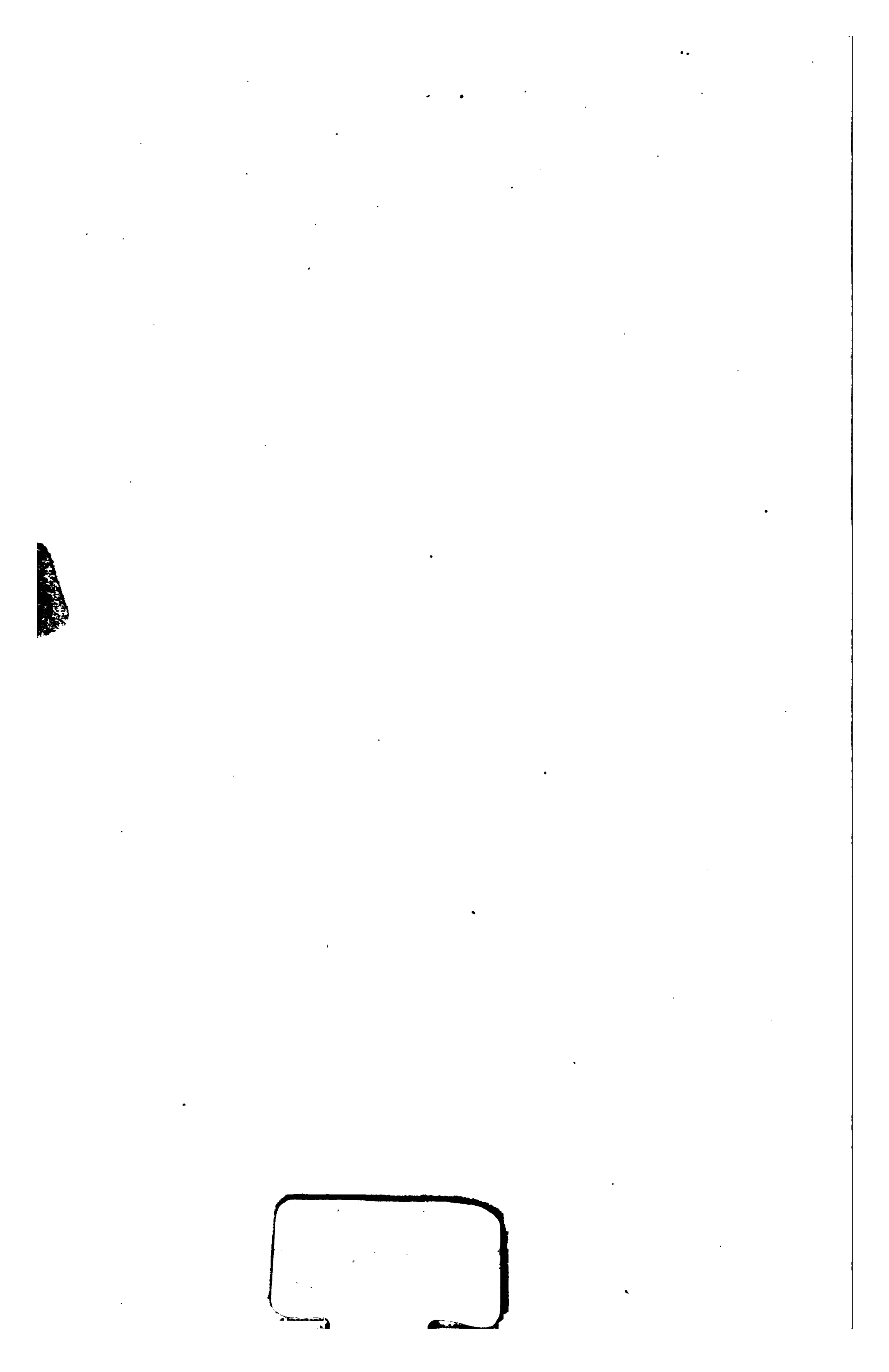




[redacted]



Lehrbuch

der

Stereometrie

nebst zahlreichen Uebungen und einem Abschnitt über

Krystallographie.

Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie für den Selbstunterricht

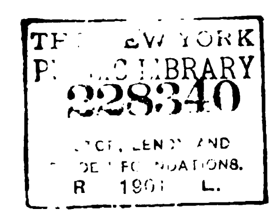
bearbeitet von

Dr. P. Sauerbeck,
Professor am Gymnasium in Reutlingen.

Mit 222 Abbildungen.



Stuttgart 1900.
Arnold Bergsträßer Verlagsbuchhandlung
A. Kröner.


228340

Vorwort.

Vorliegende Arbeit gründet sich auf langjährige Erfahrungen, die der Verfasser bei Erteilung des Unterrichts in Stereometrie am hiesigen Gymnasium gewonnen hat. Sie ist in erster Linie für die Bedürfnisse der Schüler höherer Lehranstalten geschrieben. Insbesondere soll sie den Schüler von schriftlichen Arbeiten so weit als möglich entlasten, um den Hauptteil der für dieses Unterrichtsfach vorgesehenen Zeit auf das Zeichnen, das vorzüglichste Hilfsmittel für die Erweckung räumlicher Anschauung, verwenden zu können.

Der Verfasser war bestrebt, das vielfach in neuester Zeit zu Gunsten der algebraischen Rechnung zurückgedrängte geometrische Moment wieder mehr zur Geltung zu bringen; denn die Hauptaufgabe der Stereometrie ist und bleibt die Pflege räumlicher Anschauung. So erweist sich u. a. die Stereometrie da vor allem, wo nur elementar mathematische Kenntnisse vorausgesetzt werden dürfen, wie bei den Gymnasien, als ganz besonders geeignet, in die Lehre von den Kegelschnitten einzuführen, eine Aufgabe, der sich das moderne Gymnasium auf die Dauer nicht wird länger entziehen können.

Die Arbeit umfaßt sieben Abschnitte. In den drei ersten werden die allgemeinen und besonderen Lagenverhältnisse von Punkt, Gerade und Ebene besprochen, abschließend mit einer Einleitung in die Methode der darstellenden Geometrie, der vierte handelt von den natürlich vorkommenden Vielflächnern,

den Krystallen, der fünfte von den Beziehungen der Kugel und ihrem Zentralstrahlenbündel, der sechste von den Umdrehungsflächen und der siebente beschäftigt sich mit den Berechnungen von Oberflächen und Rauminhalten von Körpern, insbesondere auch mit Aufgaben über Maxima und Minima.

Zum besseren Verständnis sowie zur Uebung finden sich an geeigneter Stelle in Verbindung mit der Theorie zahlreiche Beispiele und Aufgaben.

Reutlingen, im April 1900.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Allgemeine Lagenbeziehungen zwischen den Grundgebilden.

Einleitung.

1. Die Stereometrie bildet den grundlegenden Teil der Geometrie des Raumes. Sie handelt von den Beziehungen der drei Grundgebilde — Punkt, Gerade, Ebene — in beliebiger Lage im Raum und bestimmt die Eigenschaften der von ihnen erzeugten räumlichen Gebilde (τὸ στερεόν das Feste, μετρεῖν messen), während die Planimetrie nur die beiden ersten Grundgebilde, den Punkt und die Gerade, nebst deren geometrischen Erzeugnissen, unter der Voraussetzung der besonderen Lage in einer Ebene, in den Kreis ihrer Betrachtungen zieht. Die Ableitung der räumlich geometrischen Beziehungen stützt sich auf die Sätze der ebenen Geometrie. Nur die Ebene gestattet den uneingeschränkten Gebrauch von Lineal und Zirkel. Man hat daher bei stereometrischen Entwickelungen, da auch im Raum die Zeichnungen nur auf einer starren Unterlage ausgeführt werden können, stets zuerst eine Zeichnungsebene herzustellen bezw. sich eine solche hergestellt zu denken.

Begriff der Ebene.

2. Die Ebene hat die Eigenschaft, daß sich in ihr nach ihren sämtlichen Ausdehnungen (Dimensionen) Parallelenscharen von Geraden ziehen lassen. Sind durch zwei beliebige Gerade g und h einer Ebene zwei ihrer Ausdehnungen festgelegt, so sind durch die unendlich vielen Verbindungsgeraden je zweier Punkte jener Geraden sämtliche anderen Ausdehnungen der Ebene bestimmt:

Fig. 1.

Die Ebene ist daher diejenige Fläche, die sich in allen ihren Teilen nach denselben zwei Hauptdimensionen erstreckt.

Erzeugung.

3. Demnach kann man sich eine Ebene erzeugt denken, dadurch daß von zwei sich schneidenden Geraden

a) die eine, um einen ihrer Punkte sich drehend, an der anderen hingleitet,
b) die eine, sich selbst parallel, längs der anderen fortgleitet, d. h. sich um ihren unendlich fernen Punkt dreht.

Die Ebene ist somit eindeutig bestimmt

a) durch zwei sich schneidende Gerade (Schnittpunkt im Endlichen),
b) durch zwei parallele Gerade (Schnittpunkt im Unendlichen),
c) durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb,
d) durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte, daher

Satz: Die Ebene ist durch drei voneinander unabhängige Bedingungen eindeutig bestimmt.

Schnittverhältnisse.

4. Da sich die Ebene stetig durch den unbegrenzten Raum erstreckt, den sie in zwei Hälften teilt, womit zugleich die dreifache Ausdehnung des Raumes ausgesprochen ist, so muß sie von jeder anderen Ebene nach einer steten Linie geschnitten werden. Verbindet man zwei unendlich benachbarte Punkte dieser Schnittlinie durch eine Gerade, so kann dieselbe als eine gemeinschaftliche Hauptdimension betrachtet werden, nach der beide Ebenen sich ausdehnen, daher

Satz: Zwei Ebenen schneiden sich stets in einer Geraden. Sie enthält die gemeinschaftlichen Punkte beider Ebenen.

5. Da alle Geraden einer Ebene sich schneiden (Parallele im Unendlichen), so wird auch die Schnittgerade zweier Ebenen, da sie in beiden Ebenen liegt, von sämtlichen Geraden beider Ebenen geschnitten, daher

Satz: Sämtliche Geraden einer Ebene schneiden eine beliebige andere Ebene in Punkten der gemeinschaftlichen Schnittgeraden beider Ebenen.

Satz: Jede Ebene wird von jeder beliebigen Geraden des Raumes in einem Punkt geschnitten,

denn legt man durch die Gerade eine beliebige Ebene, welche mit der geg. eine Schnittgerade erzeugt, so ist der Schnittpunkt letzterer mit der geg. Geraden der gesuchte Punkt.

6. Betrachtet man eine Gerade als Schnittgerade zweier Ebenen Φ und Ψ, so ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit einer beliebigen dritten Ebene Σ ein allen drei Ebenen gemeinsamer Punkt; von ihm laufen zugleich die beiden Schnittgeraden aus, die Φ und Ψ mit Σ erzeugen, daher

Satz: Drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt, dem Schnittpunkt ihrer drei Schnittgeraden.

Gesetz der Dualität oder Reziprozität im Raum.

7. Bei näherer Betrachtung der seitherigen Ergebnisse bezüglich der Lage der drei Grundgebilde zeigt sich, daß gegenüber von Punkt und Ebene die Gerade eine Mittelstellung im Raum einnimmt. Die geometrischen Gebilde, die sie als bewegliches Grundgebilde erzeugt, kann man sich ebenso gut durch Bewegung

eines Punkts als einer Ebene

erzeugt denken, denn die Gerade bildet sowohl

die Verbindung zweier Punkte als den Schnitt zweier Ebenen.

Es gibt also stets zwei korrelative oder reziproke (dualistische) geometrische Arten der Erzeugung räumlicher Gebilde und der Ableitung ihrer Eigenschaften aus den reziproken Gebilden Punkt und Ebene: Gesetz der Dualität oder Reziprozität.

8. Die Vertauschung der Grundgebilde Punkt und Ebene liefert folgende reziproke Sätze:

Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, ihre Verbindungsgerade.	Zwei Ebenen bestimmen eine Gerade, ihre Schnittgerade.
Eine Gerade und ein Punkt außerhalb bestimmen eine Ebene.	Eine Gerade und eine Ebene bestimmen einen Punkt.
Drei Punkte bestimmen eine Ebene.	Drei Ebenen bestimmen einen Punkt.
Zwei sich schneidende Gerade bestimmen eine Ebene.	Zwei sich schneidende Gerade bestimmen einen Punkt.

Haben zwei Gerade keinen Punkt gemein, so haben sie auch keine Ebene gemein. Solche Gerade heißen windschief.

9. Die Gerade ist sich selbst reziprok. Sie kann betrachtet werden als Trägerin der unendlich vielen

auf ihr liegenden Punkte: Punktreihe.	durch sie gehenden Ebenen: Ebenenbüschel.
Verbinde dieselben durch Gerade mit einem Punkt außerhalb, so entsteht ein Strahlenbüschel durch den Punkt in der durch Punkt und Gerade bestimmten Ebene.	Schneide dasselbe durch eine beliebige Ebene, so entsteht ein Strahlenbüschel in der Ebene durch den durch Ebene und Gerade bestimmten Punkt.

10. Dieses Gesetz bietet zugleich ein wichtiges Hilfsmittel für die Lösung von Aufgaben der Lage, insofern als

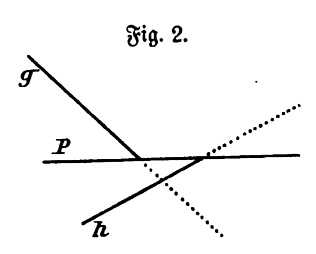
1. die Lösung der reziproken Aufgabe, die manchmal weniger schwierig ist, durch Vertauschung der reziproken Begriffe die Lösung der ursprünglichen Aufgabe ergiebt,

2. zwei verschiedene reziproke Lösungen einer und derselben Aufgabe sich ergeben, falls die Begriffe Punkt und Ebene in symmetrischer Weise vorkommen.

Beispiel: Durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, die zwei beliebige windschiefe Gerade schneidet.

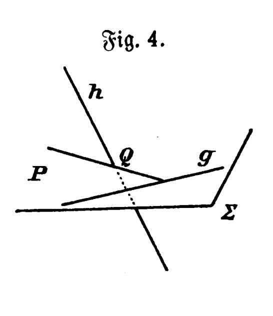
1. Lege durch den geg. Punkt P und jede der beiden Geraden eine Ebene, so ist deren Schnittgerade die gesuchte Gerade (Fig. 2).

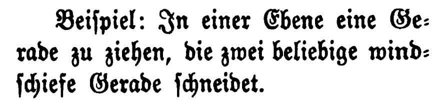
Fig. 2.



2. Lege durch den Punkt und die eine Gerade g eine Ebene, so ist ihr Schnittpunkt Q mit der anderen Geraden mit dem geg. Punkt zu verbinden (Fig. 4).

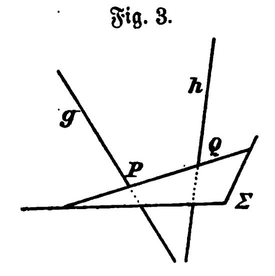
Fig. 4.




Beispiel: In einer Ebene eine Gerade zu ziehen, die zwei beliebige windschiefe Gerade schneidet.

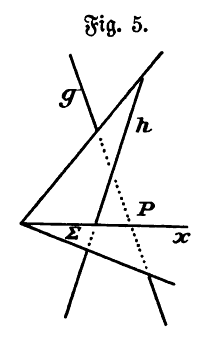
1. Bestimme die Schnittpunkte P und Q der Geraden mit der Ebene, so ist ihre Verbindungsgerade die gesuchte Gerade (Fig. 3).

Fig. 3.



2. Bestimme den Schnittpunkt P der einen Geraden g mit der Ebene. Lege durch ihn und die andere Gerade eine Ebene, so ist ihre Schnittgerade x mit der geg. Ebene die gesuchte Gerade (Fig. 5).

Fig. 5.



Sich selbst reziprok ist die Aufgabe: Eine Gerade zu ziehen, die drei windschiefe Gerade schneidet.

Wähle auf der einen Geraden einen beliebigen Punkt, so ist durch diesen eine Gerade zu ziehen, die die beiden anderen Geraden schneidet.

Lege durch die eine Gerade eine beliebige Ebene, so ist in derselben eine Gerade zu ziehen, welche die zwei anderen Geraden schneidet.

11. Der Beweis folgenden Satzes geschieht nach dem Prinzip der Dualität am einfachsten, indem man zuvor den dualistischen Beweis rechts führt:

Vier Ebenen $\Gamma\Delta\Phi\Psi$ sind gegeben; wenn sich die beiden Schnittgeraden $\Gamma\Delta$ und $\Phi\Psi$ schneiden, so gehen die vier Ebenen durch denselben Punkt, folglich schneiden sich auch die Geraden $\Delta\Phi$ und $\Gamma\Psi$, ebenso auch $\Gamma\Phi$ und $\Delta\Psi$.

Vier Punkte CDPQ sind gegeben; wenn sich die Geraden CD und PQ schneiden, so liegen die vier Punkte in einer Ebene, folglich schneiden sich auch die Geraden DP und CQ, ebenso CP und DQ.

Desgleichen folgenden Satz:

Wenn eine beliebige Anzahl von Geraden sich paarweise schneiden und nicht in derselben Ebene liegen, so gehen sie alle durch denselben Punkt und bilden ein

Strahlenbündel.

Wenn eine beliebige Anzahl von Geraden sich paarweise schneiden und nicht durch denselben Punkt gehen, so liegen sie alle in einer Ebene:

Strahlen-(Geraden-)Ebene.

Man kann auffassen:

den Punkt als Träger der unendlich viel durch ihn gehenden Geraden und Ebenen, d. h. als Träger eines Strahlen- oder Ebenenbündels.

die Ebene als Trägerin der unendlich vielen in ihr liegenden Geraden und Punkte, d. h. als Geraden- oder Punktebene.

Das Bündel ist also eine Vielheit höherer Ordnung als das Büschel.

Schnitt des Strahlenbündels durch Ebenen. Zentralprojektion. Perspektive im Raum.

12. Ein Strahlenbündel entsteht, wenn ein Gegenstand vom Auge als Mittelpunkt aus projiziert wird. Man hat sich das Auge mit jedem Punkt des Gegenstands durch eine Gerade, mit jeder Geraden des Gegenstands durch eine Ebene verbunden zu denken, denn jeder Punkt des Gegenstands sendet einen Lichtstrahl, jede Gerade desselben eine Lichtebene in das Auge. Jeder Schnitt dieses aus der Gesamtheit aller projizierenden Strahlen und Ebenen bestehenden Strahlen- oder Ebenenbündels mit einer Ebene liefert ein Bild, die sogen. Zentralprojektion, das im Beschauer genau denselben Eindruck erweckt, wie der Gegenstand selbst. Jedes ebene zentralprojektive Bild eines Gegenstands kann als Projektion oder perspektivisches Bild jedes anderen, vom selben Mittelpunkt (Zentrum) aus entworfenen, betrachtet werden.

Zwei, in beliebigen Bildebenen Σ und Σ' liegende zentralprojektive oder perspektive Bilder haben daher die Eigenschaft:

1. Jedem Punkt des einen Bildes entspricht eindeutig ein Punkt des anderen. Entsprechende Punkte sind die Schnittpunkte eines Lichtstrahls mit beiden Bildebenen.

2. Jeder Geraden des einen Bildes entspricht eindeutig eine Gerade des anderen. Entsprechende Gerade sind die Schnittgeraden der Bildebenen mit einer projizierenden Ebene.
3. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt, den Projektionsmittelpunkt.
4. Die Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen auf einer Geraden, der Projektionsachse. Sie ist die Schnittgerade beider Bildebenen, denn jede projizierende Ebene schneidet die beiden Bildebenen, nach dem Satz über den Schnitt dreier Ebenen, in zwei Geraden, die sich auf der Schnittgeraden der Bildebenen treffen müssen.
5. Die Punkte der Projektionsachse entsprechen sich selbst.

Man nennt diese Perspektive auch Malerperspektive oder freie Perspektive. Nimmt man Bilder, die durch Zentralprojektion erzeugt sind, aus ihrer perspektiven Lage, so heißen sie kollinear, da die Eigenschaften 1. und 2. erhalten bleiben. Kollineare Bilder können selbstredend stets wieder in perspektive Lage gebracht werden, man hat nur den Projektionsmittelpunkt und die Achse, auch Kollineationszentrum und -achse genannt, zu suchen.

Perspektive in der Ebene in Wechselbeziehung zur Perspektive im Raum.

13. Projiziert man die beiden, in verschiedenen Ebenen liegenden perspektiven Bilder Σ und Σ', deren Mittelpunkt und Achse S und s sein mögen, von einem anderen Mittelpunkt T aus durch die Strahlenbündel $T\Sigma$ und $T\Sigma'$, so liefert der Schnitt letzterer mit einer neuen Bildebene Φ zwei nunmehr in einer und derselben Ebene liegende perspektive Bilder Ω und Ω', deren Projektionsmittelpunkt S' die Projektion von S, deren Achse s' die Projektion von s ist.

Es projizieren sich von T aus:

alle Strahlen durch S als Ebenenbüschel der Achse TS;

zwei auf einem Strahl u von S aus liegende zugeordnete Punkte in Σ und Σ' als zwei zugeordnete, in einer Ebene (Tu) des Ebenenbüschels der Achse TS liegende Strahlen.

alle Punkte auf s als Strahlenbüschel in Ebene (Ts);

zwei in einem Punkt U auf s sich schneidende zugeordnete Gerade von Σ und Σ' als zwei zugeordnete, durch eine Gerade TU des Strahlenbüschels der Ebene (Ts) gehende Ebenen.

Daher schneidet eine Ebene Φ:

entsprechende Strahlen in Punkten, deren Verbindungsgerade durch einen Punkt, den Schnittpunkt der Ebene Φ mit dem projizierenden Strahl TS, gehen;

entsprechende Ebenen nach Strahlen, deren Schnittpunkte auf einer Geraden, der Schnittgeraden der Ebene Φ mit der projizierenden Ebene (Ts), liegen;

d. h. zwei in einer Ebene liegende, eindeutig zugeordnete Bilder Ω und Ω' sind perspektiv, wenn

die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte durch einen Punkt, den Projektionsmittelpunkt, gehen.

die Schnittpunkte entsprechender Geraden auf einer Geraden, der Projektionsachse, liegen.

Stellt man perspektive Bilder, die räumlich in verschiedenen Ebenen liegen, in der Zeichnungsebene dar, so lassen sich dieselben demnach geradezu auch als perspektive Bilder der ebenen Geometrie betrachten. Sämtliche Eigenschaften der räumlichen Perspektive können daher entsprechend für die ebene Geometrie gedeutet werden.

Zugleich folgt, daß in der Ebene die Gerade und der Punkt reziproke Gebilde darstellen.

14. Jede der beiden Lagenbedingungen perspektiver Bilder:

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt,

Die Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen auf einer Geraden,

bedingt die andere.

1. Beweis mittels des Dualitätsprinzips.

2. Beweis mit Hilfe vom

Satz des Desargues:

Liegen zwei Dreiecke im Raum so, daß die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden.

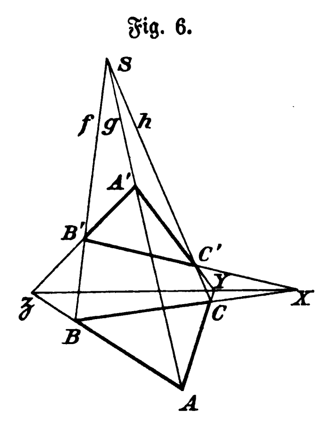
und seiner Umkehrung:

Liegen zwei Dreiecke im Raum so, daß die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden liegen, so schneiden sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken in einem Punkt.

Beweis des linksseitigen Teils:

Die drei Paare zugeordneter Dreieckseiten liegen in den, durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte bestimmten projizierenden Ebenen (fg), (fh), (gh), schneiden sich somit in den Punkten X, Y, Z. Jedes Paar kann demnach als Schnitt einer der projizierenden Ebenen mit den Ebenen Γ und Σ der Dreiecke A B C und A'B'C' betrachtet werden. Nach dem Satz über den Schnitt dreier Ebenen ist der Schnittpunkt zweier ihrer drei Schnittgeraden derjenige Punkt, durch welchen auch die dritte Schnittgerade gehen muß. Daher folgt, wenn schematisch an die verbindenden Bögen zweier Ebenen deren Schnittgerade angeschrieben wird:

Fig. 6.



AB (fg) A'B'	BC (fh) B'C'	CA (gh) C'A'
Γ Σ	Γ Σ	Γ Σ
Z . . .	X	Y . . .

d. h. die Punkte X, Y, Z sind Punkte der Schnittgeraden der Ebenen der geg. Dreiecke. Damit ist zugleich die räumliche Bedeutung der Geraden XYZ dargethan.

Deutet man die Zeichnung als solche der ebenen Geometrie, so lautet der bewiesene Satz und seine Umkehrung:

Schneiden sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier in einer Ebene liegenden Dreiecke in einem Punkt, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden.

Liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden, so .....

Sätze der ebenen Geometrie können daher auch durch räumliche Betrachtungen erhärtet werden.

15. Die Zeichnung zum Beweis des Desargues kann räumlich noch in anderer Weise aufgefaßt werden:

AB und AC bilden mit A'B' und A'C' die Seiten eines windschiefen Vierecks AYA'Z, d. h. eines Vierecks, dessen vier Ecken nicht in einer Ebene liegen. Diesem ist ein beliebiges ebenes Viereck BCC'B' einbeschrieben. Die Ecken desselben sind die Schnittpunkte einer beliebigen Ebene mit den Seiten des windschiefen Vierecks. Dann lautet der

Satz: Ist einem windschiefen Viereck ein ebenes einbeschrieben, so schneiden sich je zwei Gegenseiten des letzteren auf einer Diagonale des windschiefen Vierecks.

Der Satz kann auch unmittelbar bewiesen werden. Aus

CC' ⌒ (BCC'B') ⌒ BB'
(AYA') (AZA')
⌣
AA'

folgt: AA', BB', CC' sind die Schnittgeraden dreier Ebenen, schneiden sich somit in einem Punkt. Dasselbe gilt für BC, B'C', YZ.

Deutet man die Zeichnung für die ebene Geometrie, so lautet der bewiesene

Satz: Ist einem ebenen Viereck ein anderes einbeschrieben, von welchem zwei Gegenseiten sich auf einer Diagonale des ersteren treffen, so liegt auch der Schnittpunkt des anderen Paares Gegenseiten auf der anderen Diagonale.

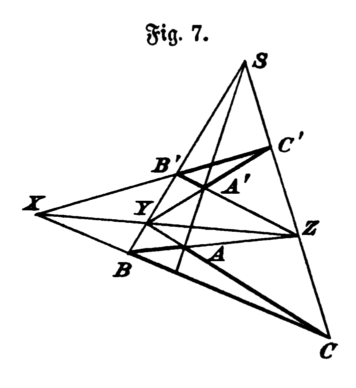
16. Die Sätze des Desargues und vom windschiefen Viereck, für die Ebene gedeutet, dienen, da es sich bei ihnen um den Schnitt dreier Geraden in einem Punkt handelt, zur Lösung der

Aufgabe: Nur mit Hilfe eines Lineals, ohne Benützung von Winkel und Zirkel, einen beliebigen Punkt einer Ebene mit dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden derselben zu verbinden.

a) Der Punkt, etwa A, liege zwischen den geg. Geraden BB′ und CC′, deren Schnittpunkt S unzugänglich sei.

Ziehe von einem beliebigen Punkt X aus, der nicht zwischen den geg. Geraden liegen soll, drei beliebige, die geg. Geraden schneidende Strahlen. Verbinde A mit den Schnittpunkten B und C des ersten Strahls bis zum Schnitt mit dem zweiten Strahl in Z und Y. Diese Punkte mit den Schnittpunkten B′ und C′ des dritten Strahls verbunden, giebt A′ und hiermit die gesuchte Gerade AA′ durch S. (Fig. 6.)

Fig. 7.



Oder: Zwei beliebige, in A sich kreuzende Gerade BZ und CY bestimmen die Strahlen CB und ZY und deren Schnittpunkt X. Zieht man durch X einen beliebigen weiteren Strahl XB′C′, so ergeben die sich kreuzenden Geraden C′Y und B′Z den Schnittpunkt A′ und damit die gesuchte Gerade AA′ durch S. (Fig. 7.)

b) Der geg. Punkt, etwa B, liege auf derselben Seite der geg. Geraden AA′ und CC′, deren unzugänglicher Schnittpunkt S ist.

Ziehe von einem beliebigen Punkte X, der wie B nicht in der Innenwinkelfläche der geg. Geraden g und h liegt, einen Strahl durch B und zwei andere Strahlen beliebig. h werde vom ersten Strahl in C, vom dritten in C′ getroffen. Verbinde einen beliebigen Punkt A auf g mit B und C bis zum Schnitt mit dem mittleren Strahl in Z und Y, dann bestimmt YC′ auf g den Punkt A′ und A′Z auf dem dritten Strahl den Punkt B′ und hiemit die gesuchte Gerade BB′. (Fig. 6.)

Oder: Nach Fig. 7 betrachte man C′ als geg. Punkt und YZ und BC als geg. Gerade mit dem unzugänglichen Schnittpunkt X.

Ziehe von einem beliebigen Punkte S auf derselben Seite der geg. Geraden wie C′ zwei Strahlen, den einen durch C′, den anderen beliebig; ersterer schneidet die geg. Geraden in Z und C, letzterer in Y und B. Diese Schnittpunkte über Kreuz verbunden, entsteht Schnittpunkt A. Dann bestimmt YC′ auf dem dritten Strahl SA den Punkt A′ und ZA′ auf dem zweiten Strahl Punkt B′, somit C′B′ die gesuchte Gerade.

Der Beweis beruht überall auf der perspektiven Lage der Dreiecke ABC und A′B′C′, bezw. BZB′ und CYC′.

Die Pyramide.

17. Der Satz des Desargues läßt sich auf das Vieleck ausdehnen. Führe den Beweis für die Teildreiecke, in welche das Viereck durch die Diagonalen von einer Ecke aus zerlegt wird.

Projiziert man die Seiten eines ebenen n-Ecks von einem Punkt S aus durch Ebenen, so heißt der durch die Ebene des n-Ecks, die sogen. Grund-

ebene, und das projizierende Ebenenbündel begrenzte Raum eine n-seitige Pyramide. Die seitliche Umgrenzung bilden n Dreiecke. S heißt die Spitze.

Mit diesem Begriff der Pyramide lautet der Satz des Desargues allgemein:

Satz: Jede Pyramide wird von jeder beliebigen Ebene nach einem zur Grundfläche perspektiven Vieleck geschnitten. Die Spitze der Pyramide ist das Projektionszentrum, die Schnittgerade beider Vielecksebenen die Projektionsachse.

Für die Ebene gebeutet:

Satz: Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier Vielecke durch einen Punkt, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden und umgekehrt: Die Vielecke sind in perspektiver Lage.

Bestimmungsstücke der perspektiven Lage zweier Bildebenen.

18. Da jede Ebene durch drei Bedingungen der Lage nach eindeutig bestimmt ist, so folgt:

Zwei perspektive ebene Bilder im Raum sind eindeutig bestimmt durch

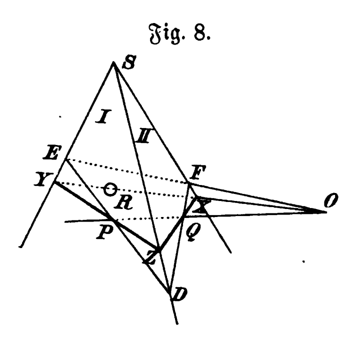
1. drei Paare entsprechender Punkte,
2. zwei Paare entsprechender Punkte und einen sich selbst entsprechenden Punkt der Achse,
3. ein Paar entsprechender Punkte, den Mittelpunkt und die Achse.

Beispiele.

19. 1. Beispiel: Gegeben drei Ebenen und in jeder derselben ein Punkt. Gesucht der Schnitt der Ebene der drei Punkte mit den geg. Ebenen.

1. Lösung: Die drei geg. Ebenen I, II, III seien dargestellt durch ihre drei im Punkt S sich treffenden Schnittgeraden. Legt man durch die Verbindungsgerade zweier der geg. Punkte, etwa P in I und Q in II, eine beliebige Ebene (D E F), indem man von einem beliebigen Punkt D der Schnittkante (I, II) nach P und Q Strahlen zieht, welche (I, III) in E und (II, III) in F treffen und somit E F als Schnittgerade von (D E F) mit III bestimmen, dann ist gemäß 5) der Schnittpunkt O von P Q mit E F derjenige Punkt, in welchem P Q die Ebene III trifft. Da dieser Punkt ein unveränderlicher fester Punkt ist, so folgt, wenn man eine beliebige zweite Ebene (D′ E′ F′) durch P Q legt, daß auch E′ F′ durch O gehen muß, d. h. Ebene III schneidet das Ebenenbüschel der Achse P Q nach einem Strahlenbüschel durch den Schnittpunkt O der Ebene III mit der Achse P Q des Büschels; daher, weil die gesuchte Schnittgerade von (P Q R) und III durch R gehen muß, O R eben diese Schnittgerade. Verbindet man den Schnittpunkt X von O R und Schnittkante (II, III) mit Q, den Schnittpunkt Y von O R und Schnittkante

Fig. 8.



(I, III) mit P, so treffen sich XQ und YP in einem Punkt Z der Schnittkante (I, II), somit XYZ das gesuchte Schnittdreieck.

Damit ist zugleich für die ebene Geometrie die Aufgabe gelöst: Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten durch drei geg. Punkte gehen, dessen Ecken auf drei in einem Punkt sich schneidenden Geraden liegen,

und der Satz bewiesen:

Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen Dreiecks auf drei festen Geraden, die durch einen Punkt gehen, und drehen sich dabei zwei Seiten um zwei feste Punkte, so dreht sich auch die dritte Seite um einen festen Punkt, der mit den beiden anderen Punkten in einer Geraden liegt.

Drehen sich die Seiten eines veränderlichen Dreiecks um drei feste Punkte, die in einer Geraden liegen und bewegen sich dabei zwei Ecken in zwei festen Geraden, so bewegt sich auch die dritte Ecke in einer dritten festen Geraden, die sich mit den beiden ersten in demselben Punkt schneidet.

Auf das Viereck erweitert, lauten die Sätze:

Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen vollständigen Vierecks (die Verbindungsgeraden der Gegenecken eines gewöhnlichen Vierecks rechnen hier ebenfalls als Seiten) in vier durch einen Punkt gehenden Geraden, und drehen sich dabei drei Seiten desselben, die nicht durch einen Punkt gehen, um drei feste Punkte, so drehen sich die übrigen Seiten um drei andere feste Punkte. Diese sechs Punkte liegen zu je dreien auf einer Geraden (Fig. 6). Als Drehpunkte des veränderlichen Vierecks AYA'Z sind die auf den sechs Seiten desselben liegenden sechs Eckpunkte des Vierseits BCC'B' zu betrachten.

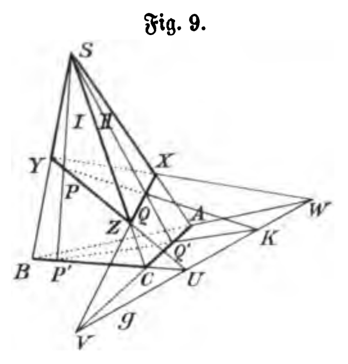
Drehen sich die Seiten eines veränderlichen vollständigen Vierseits (die Schnittpunkte der Gegenseiten eines gewöhnlichen Vierecks rechnen hier ebenfalls als Ecken) um vier feste Punkte, die in einer Geraden liegen, während drei Ecken desselben sich in drei geg. Geraden bewegen, so bewegen sich auch die übrigen drei Ecken des Vierseits in drei anderen festen Geraden. Je drei der sechs Geraden gehen durch einen Punkt.

Soll der Satz für sich bewiesen werden, so ist auf die Teildreiecke des Vierseits 14) anzuwenden.

Gehen die drei ersten Geraden durch einen Punkt, so schneiden sich sämtliche sechs Gerade, auf denen die Ecken des Vierseits sich bewegen, in diesem Punkt. Die Vierseite liegen in diesem Fall perspektiv: sie sind, räumlich betrachtet, die Schnitte einer vierseitigen Pyramide mit den Ebenen eines Ebenenbüschels, das die Gerade der vier festen Punkte zur Achse hat.

2. Lösung. Betrachte die geg. Ebenen als Seitenflächen, ein beliebiges Schnittdreieck ABC als Grundfläche Γ einer dreiseitigen Pyramide. Die PQ

Fig. 9.



von S aus projizierende Ebene schneidet die Grundfläche nach der PQ zugeordneten Strecke P′Q′; der Schnittpunkt K von PQ und P′Q′ ist daher derjenige Punkt, in welchem PQ die Grundfläche Γ schneidet. Projiziert man ebenso von S aus die Seiten QR und RP nach Γ, so folgt aus der perspektiven Lage der Dreiecke PQR und P′Q′R′, daß die Schnittpunkte K, L, M entsprechender Seiten in einer Geraden liegen, welche die Schnittgerade g der Ebene (PQR), mit der Grundfläche Γ ist. Bringt man Ebene (PQR), kürzer mit Σ bezeichnet, zum Schnitt mit den Seitenflächen der Pyramide, so folgt aus

BC ⁀I⁀ UP	CA ⁀II⁀ VQ	AB ⁀III⁀ WR
Γ Σ	Γ Σ	Γ Σ
g	g	g

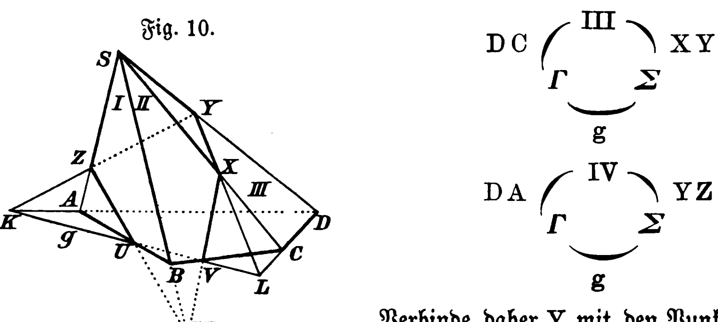
daß durch Verbindung der geg. Punkte P, Q, R mit den Punkten U, V, W, in welchen die Grundseiten BC, CA, AB die Schnittgerade g treffen, das gesuchte Schnittdreieck XYZ entsteht.

Hat man UP und VQ gezogen, so geht zur Probe XY durch W.

20. 2. Beispiel. Gegeben eine vierseitige Pyramide mit der Spitze S und Grundfläche ABCD. Den Schnitt mit einer Ebene zu zeichnen, die bestimmt sei durch eine AB in U und BC in V schneidende Gerade g und Punkt Y auf der Seitenkante SD.

Lösung: Da Y den Ebenen III und IV angehört, so bestimmt man zuerst den Schnitt der Ebene (UVY), kurz geschrieben Σ, mit diesen zwei Seitenebenen:

Fig. 10.



Verbinde daher Y mit den Punkten K und L, in welchen g von den Grundkanten DA und DC getroffen wird, dann ist UVXYZ der gesuchte Durchschnitt.

Zur Probe treffen sich ZU und XV in einem Punkt W der Seitenkante SB, dem Schnittpunkt der Ebenen I, II, Σ.

21. 3. Beispiel. Satz: Jedes vier harmonische Punkte einer Geraden projizierende Ebenenbüschel wird von jeder beliebigen Geraden in vier harmonischen Punkten geschnitten und heißt daher ein harmonisches Ebenenbüschel.

Beweis: Da vier harmonische Punkte einer Geraden, von jedem beliebigen Punkt aus, stets durch ein harmonisches Strahlenbüschel projiziert werden, das von einer beliebigen Geraden der Ebene des Büschels selbst wieder in vier harmonischen Punkten geschnitten wird, die zu den geg. vier perspektiv liegen, so folgt: Zieht man durch einen der vier harmonischen Punkte der geg. Geraden g eine beliebige Gerade h, so schneidet Ebene (gh) das Ebenenbüschel nach einem harmonischen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Achse des Ebenenbüschels mit (gh) ist. Dieses Strahlenbüschel erzeugt auf h vier harmonische, zu den Punkten auf g perspektiv liegende Punkte. Zieht man durch einen derselben, jedoch nicht durch den g und h gemeinsamen, eine weitere beliebige Gerade k, so wird auch diese von dem Strahlenbüschel, das als Schnitt der Ebene (hk) mit dem Ebenenbüschel entsteht, in vier, zu den Punkten auf h perspektiven, harmonischen Punkten geschnitten. Läßt man die verbindende Gerade h weg, so kann k als eine, bezüglich g beliebige Gerade betrachtet werden, womit der Satz bewiesen ist.

22. Aufgaben zum ersten Abschnitt:

1. Gegeben drei sich schneidende Ebenen und in zweien derselben je ein Punkt. Den Schnittpunkt der die Punkte verbindenden Geraden mit der dritten Ebene zu bestimmen.
2. Durch vier von einem Punkt ausgehende Gerade sind die sechs Ebenen gelegt. Zeichne die Schnittgeraden der drei Paar Gegenebenen. Andeutung: Wähle in zwei Gegenebenen und einer beliebigen dritten Ebene des Ebenenbündels je einen Punkt und denke sich durch diese drei Punkte eine Ebene gelegt.
3. In zwei Gegenebenen des in 2. geg. Ebenenbündels liege je ein Punkt. Zeichne die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden beider Punkte mit den übrigen Ebenen des Bündels.
4. Nach wieviel Geraden schneiden sich n Ebenen? Sonderfall, wenn dieselben durch einen Punkt gehen.
5. Nach wieviel Geraden schneiden sich n Ebenen, wenn α derselben durch eine einzige Gerade (Ebenenbüschel α), β andere durch eine zweite Gerade (Ebenenbüschel β) gehen und γ andere sich nicht schneiden, d. h. parallel sind?
6. Durch n Kanten eines Strahlenbündels lassen sich wieviel Ebenen legen?
7. Gegeben eine fünfseitige Pyramide und auf drei der Seitenkanten je ein Punkt. Zeichne den Durchschnitt der Pyramide mit der Ebene der drei Punkte. Deutung für die ebene Geometrie.

8. Eine beliebige Pyramide durch eine Ebene zu schneiden, die bestimmt sei durch eine beliebige Gerade der Grundfläche und einen beliebigen Punkt einer Seitenkante bezw. einer Seitenfläche der Pyramide.
9. Irgend ein Strahl durch die Spitze einer beliebigen Pyramide treffe die Grundfläche in einem Punkte P. Den Schnitt dieses Strahls mit einer beliebigen, die Pyramide schneidenden Ebene zu bestimmen.
10. Durch zwei beliebige, perspektive Dreiecke seien die Hälften der Zeichnungsebene als perspektive Punktsysteme einander zugeordnet. Zu einem beliebigen Punkt (oder Geraden, oder Vieleck) des einen Systems den zugeordneten Punkt (Gerade, Vieleck) des anderen zu finden, ohne Benützung des Projektionsmittelpunktes.
11. Gegeben in Ebene I die Punkte A und B, in II die Punkte C und D, in III die Punkte E und F. Bestimme die Punkte, in denen die drei Ebenen von der Schnittgeraden der Ebenen (A C E) und (B D F) geschnitten werden.

II. Abschnitt.

Parallele Lage von Geraden und Ebenen.

---

23. Hauptsatz: Durch parallele Verschiebung von Geraden bezw. Ebenen ändert sich deren Richtung bezw. Stellung nicht, d. h. die in verschiedene neue Lagen parallel verschobenen Gebilde, Gerade und Ebene, sind wieder parallel.

Parallele Geraden.

24. Durch zwei parallele Gerade ist eine Ebene eindeutig bestimmt. Jede Gerade einer Schar von n Parallelstrahlen im Raum läßt sich daher als Achse eines Ebenenbüschels betrachten, dessen n—1 Ebenen die übrigen n—1 Parallelen von der Achse aus projizieren. Im ganzen erhält man somit n Ebenenbüschel von je n—1 Ebenen, dabei ist jede Ebene doppelt gerechnet, somit

Satz: Durch n Parallelstrahlen lassen sich $\frac{n(n-1)}{2}$ Ebenen legen.

Prisma oder Säule.

25. Der von den m äußeren Randebenen eines Ebenenbündels mit unendlich ferner Spitze 24) und ihren m Schnittkanten begrenzte, in der Richtung der Kanten offene Teil des Raumes heißt m-seitiges Prisma. Jede beliebige Ebene schneidet dasselbe nach einem ebenen m-Eck bezw. m-Seit, wenn die Diagonalebenen gelegt sind.

Ein m-seitiges Prisma entsteht somit auch, wenn eine Gerade, sich selbst parallel, längs der Seiten eines ebenen m-Ecks hingleitet.

Parallelperspektive.

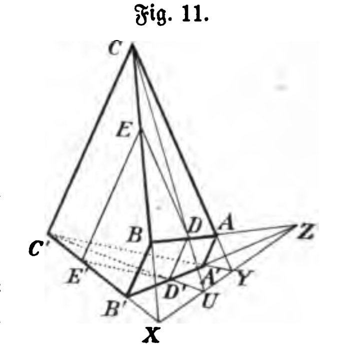
26. Irgend zwei ebene Schnitte des Prismas haben folgende Eigenschaften der Lage, von denen die eine dualistisch die andere bedingt:

1. Die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken sind parallel.
2. Die Schnittpunkte entsprechender Seiten und Diagonalen liegen auf einer Geraden, der Schnittgeraden beider Bildebenen.

Diese besondere perspektive Lage, bei welcher der Projektionsmittelpunkt im Unendlichen liegt, heißt Parallelperspektive oder schräge (schiefe) Parallelprojektion, Cavalierische Perspektive, auch Affinität, wegen der zwischen den nach diesem Projektionsverfahren hergestellten Bildern bestehenden Verwandtschaft.

Satz: Jeder ebene Schnitt eines Prismas ist das affine oder parallelperspektive Bild eines anderen.

Fig. 11.



27. Die Lage affiner Bilder zwischen projizierenden Parallelstrahlen gestattet die Anwendung des Proportionallehrsatzes. Zieht man in der oberen Bildebene des dreiseitigen Prismas eine beliebige Gerade, welche AB in D und BC in E schneidet, so bestimmen die projizierenden Strahlen durch D und E die der Geraden DE entsprechende Gerade D'E' der unteren Bildebene. Dann ist in den seitlichen Trapezen:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{B'D'}{D'A'} \text{ und } \frac{BE}{EC} = \frac{B'E'}{E'C'}, \text{ d. h.}$$

Satz: Entsprechende Strecken parallelperspektiver Bilder werden durch entsprechende Punkte im selben Verhältnis geteilt.

Ist DE || AC, also

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$$

so folgt gemäß oben:

$$\frac{B'D'}{D'A'} = \frac{B'E'}{E'C'}$$

d. h. D'E' || A'C', somit

Satz: Parallele Gerade werden durch Parallelperspektive auf eine Bildebene wieder als parallele Gerade abgebildet.

28. Die in den beiden letzten Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften machen die Parallelperspektive zur Abbildung stereometrischer Gebilde sehr geeignet. Dadurch, daß bei dieser Abbildung Teilverhältnisse von Strecken des Originals

unverändert erhalten bleiben, entsteht eine gewisse Verwandtschaft zwischen Bild und Original, allerdings noch keine so nahe Verwandtschaft, wie es die Aehnlichkeit ist, aber doch eine solche, die bewirkt, daß die Betrachtung des parallelperspektiven Bildes nicht nur den Eindruck des Originals überhaupt, sondern vor allem die Vorstellung der Größenverhältnisse desselben erweckt.

Aehnliche Betrachtungen wie 13) zeigen, daß die Zeichnungen von räumlich in verschiedenen Bildebenen liegenden parallelperspektiven Bildern unmittelbar für die ebene Geometrie gedeutet werden dürfen.

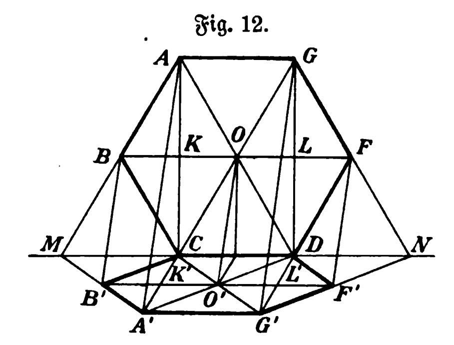
29. Wie bei der Zentralperspektive, so ist die Lage parallelperspektiver Bilder im Raum eindeutig bestimmt durch

1. drei Paare zugeordneter Punkte,
2. zwei Paare zugeordneter Punkte und einen Punkt der Projektions- oder Affinitätsachse,
3. ein Paar zugeordneter Punkte und die Affinitätsachse.

Beispiele.

30. 1. Beispiel: Auf der vertikalen Wandtafel sei über einer horizontalen Strecke als Seite ein regelmäßiges Sechseck gezeichnet. Zeichne das parallelperspektive Bild in der durch die wagrechte Sechseckseite gelegten wagrechten Tischebene Σ (Horizontalebene).

Fig. 12.



CD ist Affinitätsachse. Durch die Angabe des Treffpunkts eines einzigen Projektionsstrahls ist das parallelperspektive Bild eindeutig bestimmt. Der Strahl AA' treffe Σ in A', dann ist A'M das Bild von AM, der Strahl BB' || AA' bestimmt daher auf A'M den B zugeordneten Punkt B' u. s. f. Zur Probe: Da AB || DF, so ist A'B' || DF', ebenso CB' || F'G'; ferner, wie im Original so im Bild, O'A' = O'D, O'B' = O'F', O'C = O'G' u. s. f.

Das parallelperspektive Bild A'B'CDF'G' des regulären Sechsecks erscheint, mit letzterem verglichen, verkürzt und schief. Nichtsdestoweniger ist es geeignet, die richtige Vorstellung eines in der Ebene des Tisches liegenden regulären Sechsecks zu erwecken, sobald man sich A'C nicht verkürzt, sondern ebensolang wie AC und nicht schief, sondern senkrecht zu B'F' vorstellt. Nur diejenigen Strecken, die parallel der Achse sind, bilden sich hier in wahrer Größe ab. Die Längenausdehnung bleibt hier erhalten, die Breite dagegen erscheint verkürzt.

Verkürzung λ ist daher das Verhältnis der Bildbreite zur wahren Breite:

$$\lambda = \frac{A'C}{AC}$$

Neigung ist der Winkel, den die Breitenausdehnung des Bildes mit der Längenausdehnung einschließt: $\alpha = \sphericalangle$ A'K'B'.

Nähere Bestimmungen über die Gestalt eines parallelperspektiven Bildes trifft man gewöhnlich durch Angabe der Verkürzung und Neigung desselben. Die üblichen, für die Zeichnung günstigsten Maßannahmen sind

Verkürzung	$\frac{1}{2}$	und	Neigung	45° oder 90°
"	$\frac{1}{3}$	"	"	30° oder 60°
"	$\frac{2}{3}$	"	"	60° oder 30°

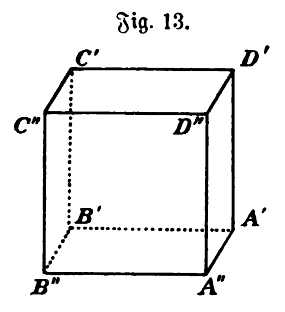
In obenstehender Zeichnung ist $\lambda = \frac{1}{3}$ und $\alpha = 60°$.

Zeichne, in ähnlicher Weise wie oben, die parallelperspektiven Bilder des regulären Sechsecks, wenn die Affinitätsachse a) eine große Diagonale, b) eine kleine Diagonale, c) die Senkrechte im Endpunkt der großen Diagonale ist.

31. 2. Beispiel. Der Würfel.

Die hintere Fläche A'B'C'D' eines Würfels, dessen Grundkanten horizontal sein mögen, liege in der vertikalen Tafelebene. Die parallelen Sonnenstrahlen fallen von vorne schief auf die Tafel, dann werfen die horizontalen Würfelkanten gleiche und parallele Schatten: A'A'' # B'B'' # C'C'' # D'D''. Verbindet man die Endpunkte dieser Schattenlängen, so entsteht das Quadrat A''B''C''D'', das parallelperspektive Bild der vorderen Würfelfläche ABCD und die ganze Zeichnung stellt die parallelperspektive Abbildung des Würfels auf seine hintere Fläche dar.

Fig. 13.



Parallelogramm A'A''B''B' ist das parallelperspektive Bild der horizontalen Würfelfläche. Es erweckt vollkommen den Eindruck eines quadratisch abgegrenzten, ebenen Flächenstücks und wird daher im folgenden zur parallelperspektiven Darstellung von Ebenen benützt.

Statt die Richtung der Sonnenstrahlen zu geben, hätte man z. B. verlangen können, das parallelperspektive Bild des Würfels etwa mit Verkürzung $\frac{1}{2}$ und Neigung 45° zu zeichnen. Dann ist $D'D'' = \frac{1}{2} D'C'$ und $\sphericalangle D''D'C' = 45°$ zu nehmen.

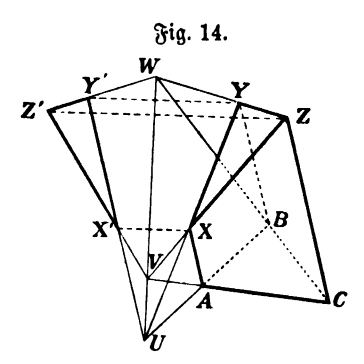
Gieb mit einer Nadel genau die Stellung CC'' der Sonne an im Raum!

Uebung: Zeichne in der Horizontalebene das parallelperspektive Bild eines in beliebiger Lage auf der Wandtafel gezeichneten Quadrats bezw. Vielecks.

32. 3. Beispiel. Bestimmung des Schnittdreiecks einer Ebene mit einem dreiseitigen Prisma in wahrer Größe mittels Umklappung.

Um das Schnittdreieck XYZ in einer beliebigen Ebene (ABC) in wahrer Größe darzustellen, dreht man die Ebene Σ dieses Dreiecks um die Schnittgerade UW beider Ebenen in die Ebene (ABC). Da bei dieser Umklappung die Punkte der Drehachse ihre Lage nicht ändern, so behalten $\triangle XYZ$ und seine Umklappung $\triangle X'Y'Z'$ die Eigenschaft, daß die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden, der Schnittgeraden beider Ebenen, liegen; nach der Umkehrung des Satzes von Desargues schneiden sich daher die drei Verbindungsgeraden entsprechender Ecken beider Dreiecke in einem Punkt. Dieser Punkt liegt unendlich fern, denn, wenn $UX'Y'$ die neue Lage der Geraden UXY ist, so ist $UX' = UX$ und $UY' = UY$, daher $XX' \parallel YY'$ u. s. f., d. h. das Schnittdreieck liegt parallelperspektiv zu seiner Umklappung. Durch Zerlegung in Dreiecke läßt sich dieselbe Betrachtung für jedes beliebige Vieleck durchführen, daher

Fig. 14.



Satz: Dreht sich die Ebene eines Vielecks um eine ihrer Geraden als feste Achse, so ist jede neue Lage des Vielecks zur ursprünglichen parallelperspektiv.

Die Kenntnis der neuen Lage einer einzigen Ecke oder Seite des Vielecks ist somit hinreichend, um das ganze Vieleck in neuer Lage (in der Umklappung) zu zeichnen.

33. Behandle die im Abschnitt I über die Schnitte dreier Ebenen und Pyramiden gestellten Aufgaben für den Fall, daß der Schnittpunkt der drei Ebenen, bezw. die Pyramidenspitze ins Unendliche fällt, die Pyramide also in ein Prisma übergeht, insbesondere die Aufgaben 19) und 20).

Gerade parallel Ebene.

34. Eine Gerade ist parallel einer Ebene, wenn sie eine Hauptdimension der Ebene ist, d. h. wenn sie durch Parallelverschiebung, etwa längs einer beliebigen, sie schneidenden Geraden, in eine Gerade der Ebene übergeht. Dabei beschreibt die sich bewegende Gerade selbst eine Ebene, somit

Satz: Jede Ebene durch eine zu einer Ebene parallelen Geraden schneidet letztere Ebene nach einer zur Geraden parallelen Schnittgeraden.

Dreht sich letztere Ebene um diese Schnittgerade als feste Achse, so kann diese als eine allen Ebenen des entstehenden Ebenenbüschels gemeinsame Hauptdimension betrachtet werden, d. h.

Satz: Alle durch eine von zwei parallelen Geraden gelegten Ebenen sind der anderen Geraden parallel.

Beide Sätze lauten mit anderen Worten auch:

1. Jedes Ebenenbüschel wird durch eine zu seiner Achse parallele Ebene nach einer Parallelgeradenschar geschnitten.
2. Sind Gerade parallel, so ist auch jede dem Ebenenbüschel durch die andere parallel.

35. Legt man durch parallele Gerade beliebige Ebenen, so können erstere als gemeinsame Hauptdimension aller dieser Ebenen betrachtet werden; überall, wo diese Ebenen zum Schnitt kommen, erstrecken sie sich daher in jener Ausdehnung, d. h.

Satz: Ebenen durch parallele Geraden erzeugen zu letzteren parallele Schnittgeraden.

Zentralperspektive Abbildung des Parallelstrahlenbündels.

36. Eine interessante Anwendung obiger Sätze ist die zentralperspektive Abbildung paralleler Geraden im Raum auf eine vertikale Bildebene.

Sämtliche Ebenen, welche vom Auge aus ein Parallelstrahlenbündel von bestimmter Richtung projizieren, schneiden sich gemäß 35) nach einer einzigen, den Strahlen des Bündels parallelen Geraden durch das Auge, welche die Bildebene im sogen. Fluchtpunkt trifft. Durch ihn gehen sämtliche Strahlen des Büschels, das als Schnitt der Bildebene mit dem Ebenenbüschel, dessen Achse die vom Auge nach dem Fluchtpunkt führende Gerade ist, das parallelperspektive Bild der Parallelenschar im Raum darstellt.

Insbesondere haben alle horizontalen Geraden und Parallelenscharen in beliebiger Höhe über der Horizontalebene und von verschiedenster Richtung (Windrose) ihre Fluchtrichtung in der, durch das Auge gelegten Horizontalebene. Die horizontale Schnittgerade dieser Ebene mit dem Himmelsgewölbe, bezw. mit der vertikalen Bildebene ist die sogen. Flucht der Horizontalebene und heißt Augenhöhe oder Horizont.

Satz: Die Fluchtpunkte sämtlicher horizontalen Geraden und Parallelenscharen des Raumes liegen in der Augenhöhe.

Da wir vom Raum nur das von unserem Auge als Mittelpunkt auf eine Bildebene (Glasscheibe bezw. Netzhaut) entworfene ebene perspektive Bild erblicken, so sehen wir Gerade und Parallelen, die im Raum wirklich horizontal liegen, im allgemeinen nicht wieder horizontal, sondern, je nachdem dieselben im Raum höher oder niederer als die Augenhöhe liegen, in einem bestimmten Punkt der Augenhöhe, eben dem Fluchtpunkt, ab- bezw. ansteigend endigen oder zusammenlaufen. Nur diejenigen Horizontalen im Raum, die in Augenhöhe liegen oder zur Bildebene parallel sind, werden wirklich horizontal gesehen, als die Augenhöhe selbst bezw. als Parallelen zu derselben. Im letzteren Fall ist der unendlich ferne Punkt der Augenhöhe der Fluchtpunkt.

Vertikale Gerade im Raum erblicken wir stets wieder vertikal. Ihr Fluchtpunkt ist das Zenith oder der Scheitelpunkt, d. h. der über unserem Scheitel befindliche, unendlich ferne Punkt, nach welchem das Senkblei weist. Der Schnitt der vertikalen Bildebene mit dem projizierenden Ebenenbüschel ist daher eine Parallelenschar zur vertikalen Achse des Büschels.

Da die Fluchtpunkte aller, zur Bildebene parallelen Strahlen unendlich ferne Punkte der Bildebene sind, so folgt allgemein

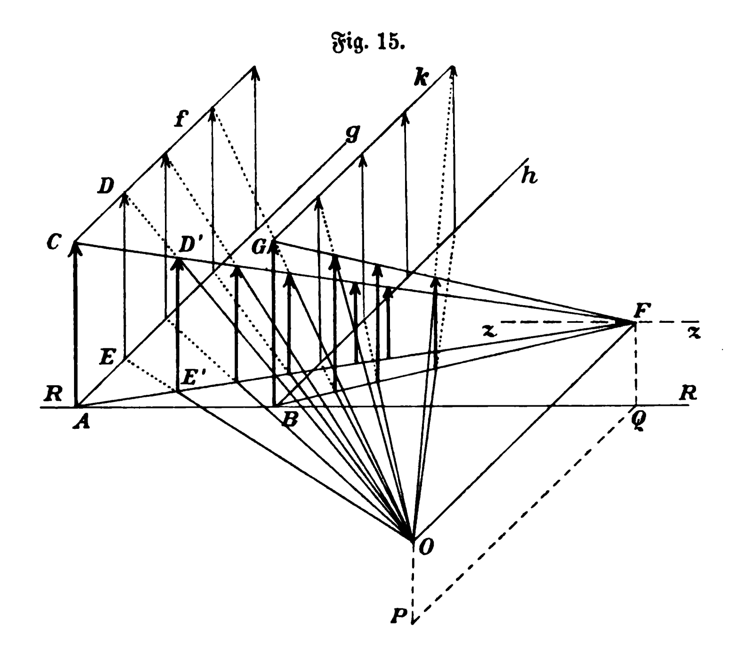
Satz: Alle zur Bildebene parallelen Strahlen projizieren sich wieder als Parallelstrahlen derselben Richtung.

Und

Satz: Alle zur Bildebene schiefen Parallelstrahlen, die nicht horizontal sind, sondern auf- bezw. absteigen, haben ihre Fluchtpunkte im Endlichen ober- bezw. unterhalb der Augenhöhe.

Erklärung der Figur: Zwei parallele gleichhohe Baumreihen längs der die Grundebene darstellenden horizontalen, zur vertikalen Bildebene (ABGC) schiefen Straße gh. Projektionsmittelpunkt O das Auge. OF || g trifft die Bildebene

Fig. 15.



im Fluchtpunkt F der Parallelenschar f || g || h || k. Die Augenhöhe oder der Horizont ZZ geht durch F parallel dem sogen. Riß RR, der Schnittgeraden der Grund- und Bildebene. Strahlenbüschel F — ABCG ist der Schnitt des Ebenenbüschels O — ghfk mit der Bildebene. Man erblickt also von O aus die unterhalb Augenhöhe verlaufenden, in Wirklichkeit parallelen Straßenränder g || h schief zum Fluchtpunkt ansteigend als AF und BF, die oberhalb Augenhöhe die Wipfel

verbindenden Horizontalen f || k dagegen zum Fluchtpunkt absteigend als CF und GF. Beide Baumreihen scheinen an Höhe abnehmend und zwar die hintere stärker als die vordere, im Punkt F zusammenzulaufen.

Die projizierende Ebene durch DE und die Bildebene durch das Lot FQ schneiden sich, da DE || FQ, nach der zu diesen Vertikalen parallelen und somit ebenfalls Vertikalen D'E', dem Bild von DE.

Die ganze hinter dem Riß sich ausdehnende Grundebene bildet sich ab auf den Teil der Bildebene zwischen Augenhöhe und Riß. Gebe in beiden Baumreihen diejenigen Punkte an, die sich in den Horizont abbilden würden. Zeichenprobe?

Parallele Ebenen.

37. Ebenen, die sich nach denselben zwei beliebig gewählten Hauptausdehnungen erstrecken, heißen parallel: ihre Schnittgerade liegt im Unendlichen.

38. Jede Gerade der einen Ebene geht somit durch Parallelverschiebung in eine Gerade der anderen Ebene über. Verschiebt man längs einer beliebigen, beide Parallelebenen schneidenden Geraden, so beschreibt die sich bewegende Gerade eine Ebene, daher

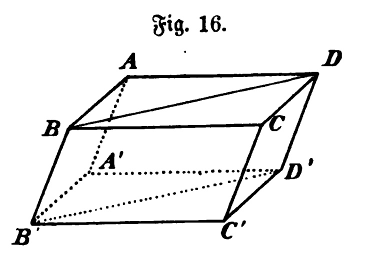
Satz: Parallele Ebenen werden durch beliebige andere Ebenen nach parallelen Geraden geschnitten.

39. Irgend zwei Parallelgeraden einer solchen Schnittebene bestimmen mit den Parallelen, nach welchen diese Ebene ein Parallelebenenpaar schneidet, ein Parallelogramm, woraus sich ergiebt

Satz: Parallele Strecken zwischen Parallelebenen sind gleich.

40. Zwei Paare paralleler Ebenen erzeugen daher vier parallele Schnittgeraden; drei Paare paralleler Ebenen schneiden sich nach drei Scharen zu je vier parallelen und gleichen Kanten und erzeugen einen von drei Paaren parallel liegender kongruenter Parallelogramme umgrenzten Körper, der Spat, Parallelflach oder schiefwinkliges Parallelepipedon heißt und als Prisma betrachtet werden kann, dessen parallele Grundflächen von Parallelogrammen gebildet werden. Was sind die Diagonalschnitte dieses Körpers? Fig. 16.

Fig. 16.



41. Wird eine Parallelebenenschar von windschiefen Geraden geschnitten, so verschiebt man diese sich selbst parallel durch einen beliebigen Punkt S und legt durch je zwei der Strahlen des entstehenden Strahlenbündels S eine Ebene. Jede derselben schneidet die Parallelebenen nach parallelen Geraden (Fig. 17):

AA' || BB' || CC'; A'A'' || B'B'' || C'C''; AA'' || BB'' || CC'',

somit:

$$AB : BC : CA = A'B' : B'C' : C'A' = A''B'' : B''C'' : C''A'' = \ldots$$

oder zufolge 39)

$$DE : EF : FD = GH : HJ : JG = \ldots$$

d. h.

Satz: Beliebige windschiefe Gerade werden von Parallelebenen nach proportionalen Strecken geschnitten.

Aehnlichkeit.

42. Denkt man sich nur die Randebenen des Strahlenbündels S gelegt, so wird die entstehende m-seitige Pyramide von der Parallelebenenschar nach m-Ecken geschnitten, welche folgende besondere Eigenschaften der Lage haben:

Die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken gehen durch einen Punkt S.

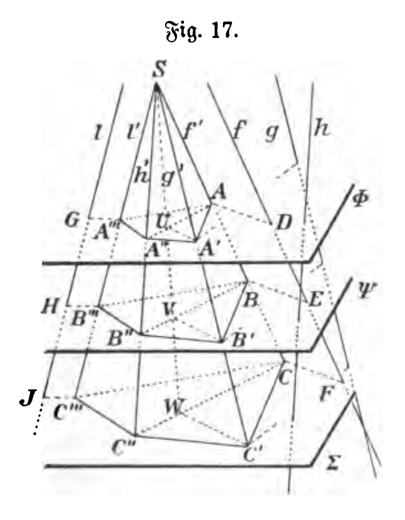
Die Schnittpunkte entsprechender Seiten und Diagonalen liegen auf einer Geraden, der unendlich fernen Schnittgeraden der Parallelebenenschar. Entsprechende Seiten und Diagonalen (entsprechende Strecken) sind somit parallel.

Diese neue, besondere perspektive Lage, bei welcher der Projektionsmittelpunkt im Endlichen, die Projektionsachse dagegen im Unendlichen liegt, heißt Aehnlichkeit; somit

Satz: Jede Pyramide wird von Parallelebenen nach ähnlich liegenden Vielecken geschnitten.

43. Da entsprechende Seiten und Diagonalen parallel und Winkel mit parallelen Schenkeln desselben Sinns gleich sind, so folgt:

Fig. 17.



$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \ldots$$
$$\sphericalangle A' = \sphericalangle B' = \sphericalangle C' = \ldots$$

$$\frac{AA'}{BB'} = \left(\frac{SA'}{SB'}\right) = \frac{A'A''}{B'B''} = \ldots$$

daher:

Satz: Aehnlich liegende Vielecke haben entsprechende Winkel gleich und entsprechende Seiten (Strecken) sind proportional.

Besitzen daher Vielecke von gleicher Seitenzahl diese beiden Eigenschaften des Maßes, so ist es stets möglich, sie in „ähnlich perspektive" Lage zu bringen. Der Projektionsmittelpunkt wird auch Aehnlichkeitspunkt genannt.

43 a. Fällt man in Σ das Lot $C'W \perp CC''$, so sind die parallelen Schnittgeraden der Ebene $(C'SW)$ mit Φ und Ψ ebenfalls Lote zu den entsprechenden Diagonalen, daher:

$$\triangle BB'B'' = \frac{BB'' \,.\, B'V}{2} \text{ und } \triangle CC'C'' = \frac{CC'' \,.\, C'W}{2}$$

also

$$\frac{\triangle BB'B''}{\triangle CC'C''} = \frac{BB'' \,.\, B'V}{CC'' \,.\, C'W}$$

Da aber

$$\frac{B'V}{C'W} = \left(\frac{SB'}{SC'}\right) = \frac{BB'}{CC'} = \left(\frac{SB}{SC}\right) = \frac{BB''}{CC''}$$

so folgt

$$\frac{\triangle BB'B''}{\triangle CC'C''} = \frac{BB''}{CC''} \cdot \frac{BB''}{CC''} = \frac{BB''^2}{CC''^2} = \frac{BB'^2}{CC'^2} \text{ d. h.}$$

Je zwei zugeordnete Dreiecke sämtlicher m—2 Dreiecke, in welche die ähnlich liegenden m-Ecke durch Diagonalen von einer Ecke aus zerlegt werden, sind den Quadraten entsprechender Vielecksseiten proportional; bezeichnen daher $\varrho, \lambda, \ldots$ die Proportionalitätsfaktoren, so ist

$$\begin{array}{ll} \triangle BB'B'' = \varrho \,.\, BB'^2 & \triangle CC'C'' = \varrho \,.\, CC'^2 \\ \triangle BB''B''' = \lambda \,.\, BB'^2 & \triangle CC''C''' = \lambda \,.\, CC'^2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

durch Addition, wobei der neue Proportionalitätsfaktor

$$\varrho + \lambda + \ldots = \mu$$

gesetzt werden kann:

$$\text{Vieleck } BB' \ldots = \mu \,.\, BB'^2 \text{ und Vieleck } CC' \ldots = \mu \,.\, CC'^2$$

oder

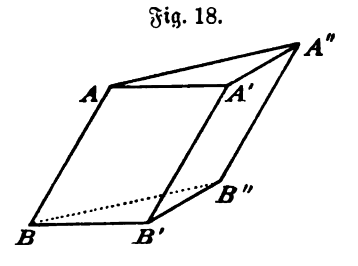
$$\frac{\text{Vieleck } BB' \ldots}{\text{Vieleck } CC' \ldots} = \frac{BB'^2}{CC'^2} = \frac{BB''^2}{CC''^2} = \frac{SB^2}{SC^2} \text{ d. h.}$$

Flächensatz: Die Flächen ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten oder Diagonalen oder Seitenkanten, allgemein wie die Quadrate entsprechender Strecken.

Kongruenz oder Deckung.

44. Rückt die Spitze S der m-seitigen Pyramide ins Unendliche, so werden die Projektionsstrahlen parallel und man erhält ein m-seitiges Prisma, das von der Parallelebenenschar nach m-Ecken geschnitten wird von folgenden besonderen Eigenschaften der Lage:

Fig. 18.



Die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken gehen durch einen ∞ fernen Punkt.

Die Schnittpunkte entsprechender Seiten liegen auf einer ∞ fernen Geraden.

Diese besondere perspektive Lage, bei welcher Projektionsmittelpunkt sowohl als -Achse im Unendlichen liegen, heißt Kongruenz.

45. Maßbeziehungen: Da entsprechende Seiten kongruent liegender Vielecke parallel sind, so folgt:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \ldots; \quad \sphericalangle A' = \sphericalangle B' = \sphericalangle C' = \ldots \text{ u. s. f.;}$$

und da die projizierenden Strahlen mit entsprechenden Seiten oder Diagonalen Parallelogramme bestimmen, so ist

$$AA' = BB' = CC' = \ldots; \; A'A'' = B'B'' = C'C'' = \ldots \text{ u. s. f.; d. h.}$$

Satz: Entsprechende Winkel und Strecken kongruenter Vielecke sind gleich.

Durch Parallelverschiebung längs eines Projektionsstrahls können daher kongruente Vielecke zur Deckung gebracht werden.

46. In gewissen Fällen werden ähnlich liegende sowohl als parallelperspektive Bilder kongruent:

a) Projiziert man von der Mitte S des Strahls AB, der eine Ecke A des in Ebene Σ liegenden Dreiecks $AA'A''$ nach B in Ebene $\Phi \parallel$ Ebene Σ abbildet, auch die anderen Ecken, so ergiebt die Betrachtung der bei S entstehenden Scheiteldreiecke:

Fig. 19.

1. daß S die Mitte sämtlicher projizierender Strahlen,
2. daß das abgebildete Dreieck bezw. Vieleck dem ursprünglichen kongruent ist.

b) Dreht man zwei der Seiten des Schnittdreiecks eines dreiseitigen Prismas in ihren Seitenflächen um die gemeinschaftliche Ecke, bis ihre beweglichen Endpunkte wieder auf die alten Prismenkanten zu liegen kommen, so schneidet die Ebene, welche durch diese neuen Lagen der gedrehten Seiten bestimmt ist, das Prisma nach einem Dreieck (bezw. Vieleck), das dem ursprünglichen kongruent ist. Beweis?

Kongruente Vielecke können daher auf dreierlei Art in perspektive Lage gebracht werden:

1. Projektionsachse und -Mittelpunkt zugleich im Unendlichen.
2. Achse im Endlichen, Mittelpunkt im Unendlichen (parallelperspektive Lage).
3. Achse im Unendlichen, Mittelpunkt im Endlichen (ähnliche Lage).

47. Da perspektive Bilder einer und derselben Ebene stets entstanden gedacht werden können durch Projektion entsprechender perspektiver Bilder des Raums, so sind die Möglichkeiten perspektiver Lage sowohl in der Ebene als im Raum erschöpft in folgender Zusammenstellung:

	Projektions-mittelpunkt:	Projektions-achse:	Sonderfall:
Zentralperspektive	endlich	endlich	. . . . . .
Parallelperspektive	unendlichfern	endlich	Kongruenz 46 b
Aehnlichkeit	endlich	unendlichfern	Kongruenz 46 a
Kongruenz	unendlichfern	unendlichfern	. . . . . .

Beispiele.

48. 1. Beispiel. Durch einen geg. Punkt zu einer geg. Ebene eine Parallelebene zu legen.

Betrachtet man zwei beliebige Gerade der geg. Ebene als deren Hauptausdehnungen, so muß sich die gesuchte Ebene nach denselben Hauptausdehnungen erstrecken, d. h. ziehe durch den Punkt zu jenen Geraden die Parallelen, so ist die durch letztere gelegte Ebene die gesuchte.

Die Parallele durch einen Punkt zu einer beliebigen Geraden zieht man nach den Regeln der ebenen Geometrie in der, zuvor durch Punkt und Gerade gelegten Zeichnungsebene.

49. 2. Beispiel. Parallelebenen windschiefer Geraden.

Zwei beliebige Windschiefe geben die Hauptausdehnungen für jede zu ihnen parallele Ebene, d. h. zieht man durch einen beliebigen Punkt zu beiden Windschiefen die Parallelen, so ist deren Ebene eine Ebene der Parallelebenenschar, die man zu zwei Windschiefen legen kann.

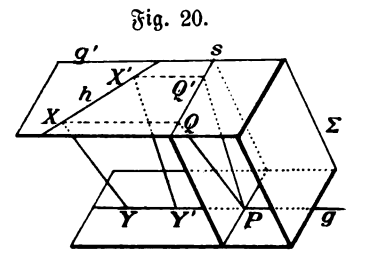
Zwei Ebenen dieser Schar gehen durch die Windschiefen selbst. Sie sind die „Parallelebenen der beiden Windschiefen", bestimmt durch je eine Windschiefe und die Parallele durch einen ihrer Punkte zur anderen Windschiefen.

Bei Aufgaben über windschiefe Gerade sind die Parallelebenen derselben oft von Nutzen.

50. 3. Beispiel. Zwischen zwei geg. windschiefe Gerade eine Strecke von geg. Länge a so zu legen, daß sie einer geg. Ebene parallel ist.

Legt man die Strecke a parallel Ebene Σ beliebig zwischen die Parallelebenen (g h') und (g' h) der beiden Windschiefen g und h, so ist dieselbe sich selbst parallel nach der einen Windschiefen und dann längs dieser bis zum Schnitt mit der anderen Windschiefen zu verschieben. (Fig. 20.)

Fig. 20.



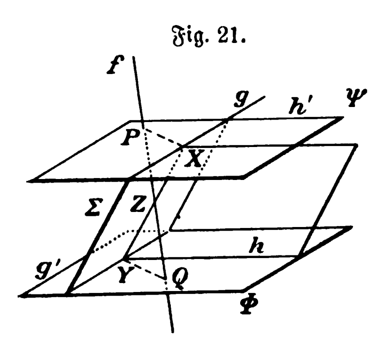
Die Schnittgerade s der Ebene (g' h) und der durch einen beliebigen Punkt P auf g parallel Σ gelegten Ebene Φ wird von dem aus P mit a in Φ beschriebenen Kreis im allgemeinen in zwei Punkten Q und Q' getroffen. Die Parallelen zu g in (g' h) durch Q und Q' bestimmen auf h die Endpunkte X und X' der gesuchten Strecken XY || PQ und X'Y' || P'Q'.

51. 4. Beispiel. Eine Gerade zu zeichnen, die drei geg. Windschiefe so schneidet, daß die durch die Schnittpunkte begrenzten Strecken ein geg. Verhältnis haben.

Die Parallelebenen (gh′) und (g′h) zweier der drei Windschiefen bestimmen auf der dritten Windschiefen f eine Strecke PQ, die durch den Schnittpunkt Z mit der gesuchten Geraden ebenfalls im geg. Verhältnis geteilt wird. Die gesuchte Gerade durch Z muß g und h schneiden, ist also Schnittgerade der Ebenen (Zg) und (Zh).

Verhindert eine ungünstige Lage von f die Bestimmung der Endpunkte P und Q und daher des Teilpunkts Z, so läßt sich Z auf f auch bestimmen durch die Parallelebene, die durch den Teilpunkt irgend einer beliebigen, günstiger zwischen den Parallelebenen liegenden, im selben Verhältnis geteilten Strecke gelegt ist. (Fig. 21.)

Fig. 21.



52. 5. Beispiel. Parallel einer Geraden f eine Gerade zu ziehen, die zwei geg. windschiefe Gerade g und h schneidet.

Die zu f parallele gesuchte Gerade ist gemeinschaftliche Hauptdimension jeder der beiden Ebenen, die sie mit den beiden Windschiefen g und h bestimmt. Diese Ebenen sind parallel f. Die gesuchte Gerade ist somit Schnittgerade der beiden, durch die Windschiefen g und h zu f parallel gelegten Ebenen.

53. Aufgaben zum II. Abschnitt:

1. Was ist der geometrische Ort aller Parallelen durch einen Punkt außerhalb einer Ebene zu sämtlichen Geraden derselben?
2. Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, die eine geg. Ebene und eine zu dieser parallele Gerade so schneidet, daß die zwischen beide fallende Strecke eine geg. Länge hat.
3. Parallel einer geg. Geraden eine Gerade zu ziehen, die eine geg. Gerade und eine geg. Kreislinie (ebene Kurve) schneidet.
4. Zwei in einer Ebene gezeichnete Strecken von gleicher Länge werden von einem beliebigen Punkt außerhalb auf eine Parallelebene projiziert. Vergleiche die Projektionen.
5. In einer von zwei Parallelebenen sei ein Vieleck gezeichnet, in der anderen eine, einer Seite desselben entsprechende, parallele Strecke. Das ähnliche Vieleck zu vervollständigen.
6. Gegeben die Affinitätsachse, ein ebenes Vieleck und ein einer Ecke desselben entsprechender Eckpunkt des affinen Vielecks. Letzteres zu vervollständigen.
7. Parallele Gerade werden von einem Ebenenbüschel nach proportionalen Strecken geschnitten.

8. Drei geg. Parallelebenen durch eine Gerade so zu schneiden, daß der Unterschied der entstehenden Abschnitte gleich einer geg. Strecke werde.
9. Zu drei geg. Parallelebenen eine vierte zu legen, so daß jede beliebige Gerade von den vier Ebenen nach harmonischen Punkten geschnitten wird.
10. Die Mitten aller Verbindungsgeraden der Punkte zweier Windschiefen liegen in einer Ebene.
11. Eine Ebene, die zu zwei Seiten eines windschiefen Vierecks parallel ist, teilt die beiden anderen im selben Verhältnis.
12. Sind drei windschiefe Gerade derselben Ebene parallel, so werden auf allen Geraden, welche die drei ersten treffen, proportionale Stücke abgeschnitten; auch sind sämtliche Gerade, welche die drei ersten treffen, einer bestimmten Ebene parallel und schneiden auf diesen proportionale Stücke ab.
13. Teilt man jedes der beiden Paar Gegenseiten eines windschiefen Vierecks in einem gewissen Verhältnis und verbindet die Teilpunkte durch Gerade, so liegen diese in einer Ebene.
14. Die Mitten der vier Seiten eines windschiefen Vierecks liegen in einer Ebene und sind die Ecken eines Parallelogramms; ebenso die Mitten je zweier Gegenseiten und der zwei Diagonalen.
15. Die drei Verbindungsgeraden der Mitten je zweier Gegenseiten und der zwei Diagonalen eines windschiefen Vierecks schneiden sich in einem Punkt und halbieren sich gegenseitig in demselben.
16. Drei windschiefe Gerade durch eine vierte Gerade so zu schneiden, daß auf letzterer gleiche Stücke abgeschnitten werden.

III. Abschnitt.

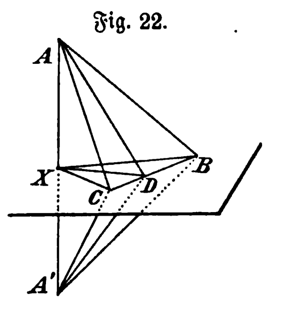
Senkrechte Lage von Geraden und Ebenen.

Ebene senkrecht einer Geraden.

54. Dreht sich der rechte Winkel AXB um den Schenkel AX als Achse in die Lage AXC, so gehört jedenfalls die Verbindungsgerade zweier beliebiger Punkte B und C des drehenden Schenkels und daher auch die Verbindungsgerade eines beliebigen Punkts D auf BC mit dem Scheitel X des rechten Winkels der Ebene BXC an und XD ist ebenfalls eine Lage des drehenden Schenkels, sobald bewiesen ist, daß

$$\sphericalangle AXD = 90^{\circ}.$$

Fig. 22.



a) Beweis nach Euklid: Um einen Winkel als rechten zu erkennen, vergleiche man ihn mit seinem Nebenwinkel. Verlängert man daher einen seiner

Schenkel, etwa AX um sich selbst bis A', so wäre, da AX = A'X und DX gemeinschaftlich

$$\triangle AXD \cong \triangle A'XD, \quad \text{sobald} \quad AD = A'D$$

Nun folgt aber aus

$$\triangle AXB \cong \triangle A'XB, \quad \text{daß} \quad AB = A'B$$

und aus

$$\triangle AXC \cong \triangle A'XC, \quad \text{daß} \quad AC = A'C$$

und daher auch

$$\triangle BAC \cong \triangle BA'C$$

da BC gemeinschaftlich. Durch Drehung um diese Seite lassen sich die beiden letzten Dreiecke zur Deckung bringen, daher

$$AD = A'D$$

und somit die Nebenwinkel

$$\sphericalangle AXD = \sphericalangle A'XD = 90^\circ$$

b) Beweis nach Legendre, beruhend auf der Umkehrung des pythagoräischen Lehrsatzes: Ist das Quadrat über einer Dreieckseite gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, so schließen diese letzteren einen rechten Winkel ein. Die Quadrate der Seiten AD und XD in der demnach für △AXD zu entwickelnden Gleichung treten mit den Seiten schiefwinkliger Dreiecke in Beziehung, sobald AD und XD Schwerlinien dieser Dreiecke werden. Verlängert man daher XD um sich selbst bis E, so bestimmen EP ∥ BX und EQ ∥ CX die Seite PQ, deren Mitte D ist. Ebenso wie △PXQ denke man sich △PAQ zum Parallelogramm mit Diagonalschnittpunkt D vervollständigt, dann ist nach dem

Fig. 23.

Satz: Die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate über den vier Seiten,

$$(2AD)^2 + (2PD)^2 = 2AP^2 + AQ^2$$
$$(2DX)^2 + (2PD)^2 = 2XP^2 + 2XQ^2$$

abgezogen

$$(2AD)^2 - (2DX)^2 = 2(AP^2 - XP^2) + 2(AQ^2 - XQ^2)$$

oder

$$4AD^2 - 4DX^2 = 2AX^2 + 2AX^2$$

somit

$$AD^2 - DX^2 = AX^2$$

oder

$$AX^2 + DX^2 = AD^2$$

daher

$$\sphericalangle AXD = 90^\circ.$$

Euklid um 300 v. Chr. in Alexandrien schrieb „Die Elemente der Geometrie" in dreizehn Büchern.

Andrien Marie Legendre, geboren in Toulouse 1752; 1795 Professor an der Ecole normale in Paris; gestorben 1833.

55. Beide Beweise ergeben: AX steht senkrecht zu sämtlichen, durch X gezogenen Geraden der Ebene (BXC) und somit, da durch Parallelverschiebung dieser Geraden in ihrer Ebene die Winkelgrößen sich nicht ändern, AX senkrecht zu allen Geraden dieser Ebene, d. h. senkrecht zur Ebene selbst, als dem Inbegriff ihrer sämtlichen Geraden. Daher

Satz: Dreht sich ein rechter Winkel um einen seiner Schenkel als feste Achse, so beschreibt der bewegliche Schenkel eine, zum festen Schenkel senkrechte Ebene und umgekehrt:

Beschreibt bei der Drehung eines Winkels um einen seiner Schenkel als feste Achse der bewegliche Schenkel eine Ebene, so ist der Winkel ein rechter.

Oder, da die Ebene durch zwei ihrer Geraden ersetzt werden kann:

Satz: Steht eine Gerade auf zwei anderen im Schnittpunkt derselben senkrecht, so steht sie auf deren Ebene senkrecht.

Oder, da durch Parallelverschiebung Winkelgrößen sich nicht ändern, der Winkel zweier windschiefer Geraden also derjenige Winkel ist, den die zum Schnitt gebrachten parallel verschobenen Geraden mit einander einschließen:

Satz: Eine Gerade steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie zu zwei beliebigen Geraden derselben senkrecht steht;

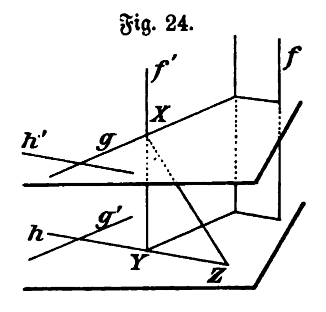
und schließlich allgemein:

Satz: Ist von drei windschiefen Geraden die eine zu den beiden anderen senkrecht, so steht sie auf deren Parallelebenen senkrecht.

Kürzeste Entfernung.

56. Verschiebt man die zu den Windschiefen g und h und daher zu deren Parallelebenen (gh') und (g'h) Senkrechte f sich selbst parallel nach g und längs g bis zum Schnitt mit h in die Lage f', so ist f' die einzig mögliche Gerade, welche beide Windschiefen g und h rechtwinklig schneidet. Ist XY die zwischen g und h fallende Strecke von f', so ist jede Strecke von X nach einem beliebigen Punkt Z auf h als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks XYZ größer als die Kathete XY, ebenso zeigt sich, daß unter allen von Y nach g gezogenen Strecken YX die kleinste ist, daher heißt XY die kürzeste Entfernung der beiden Windschiefen g und h. Sie ist zugleich der Abstand der beiden Parallelebenen von g und h und verbindet die einander am nächsten gelegenen Punkte dieser Windschiefen.

Fig. 24.



57. Unter allen von einem Punkt nach einer Ebene gezogenen Strecken ist das Lot auf die Ebene die kürzeste.

58. Da es unmöglich ist, durch perspektive Abbildung in die Ebene die räumliche Eigenschaft zu übertragen, daß eine Gerade auf zwei anderen senkrecht steht — in der Ebene giebt es bekanntlich nur eine Gerade, die zu einer anderen senkrecht steht — und da zudem rechte Winkel sich im allgemeinen nicht wieder als rechte abbilden, so sei, um doch den Eindruck des Senkrechtstehens zu erhalten, die Uebereinkunft getroffen, die zu einer Ebene senkrechte Gerade wenigstens zu einer der Seiten des die Ebene darstellenden Parallelogramms senkrecht zu zeichnen.

Mittellotebene.

59. Die Ebene, die im Mittelpunkt einer Strecke auf dieser senkrecht steht, heißt Mittellotebene.

In 54) ist Ebene (B X C) Mittellotebene zu A A′. Die Punkte A und A′ liegen symmetrisch zu (B X C). Verbindet man irgend einen Punkt P dieser Ebene mit X, A und A′ so ist $\triangle AXP \cong \triangle A'XP$, daher $AP = A'P$, somit

Satz: Die Mittellotebene einer Strecke ist geometrischer Ort aller Punkte, die von den Endpunkten dieser Strecke gleiche Entfernungen haben.

Beispiele.

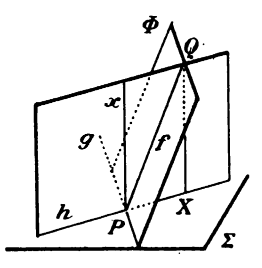
60. 1. Beispiel: In einem Punkt einer Geraden die zu ihr senkrechte Ebene zu legen.

Lege durch die Gerade zwei beliebige Zeichnungsebenen und errichte in jeder derselben auf der geg. Geraden im geg. Punkt das Lot, so ist die durch diese beiden Lote gelegte Ebene die gesuchte.

61. 2. Beispiel. In einem Punkt einer Ebene auf dieser das Lot zu errichten.

Ziehe durch den geg. Punkt P in der geg. Ebene Σ beliebig zwei zu einander senkrechte Geraden g und h. Errichte in der beliebig durch eine dieser Geraden, etwa g, gelegten Ebene Φ auf g in P das Lot f, so ist das in Ebene (fh) auf h in P errichtete Lot x zugleich das Lot zur Ebene Σ. Denn

Fig. 25.



$g \perp f$, gemäß Zeichnung

$\underline{g \perp h}$ " "

$g \perp (fh)$

und somit $g \perp x$, weil x in (fh)

ferner $\underline{h \perp x}$, gemäß Zeichnung

$(gh) \perp x$ oder $x \perp \Sigma$

62. 3. Beispiel. Von einem Punkt auf eine Ebene das Lot zu fällen.

Fälle in der, durch den geg. Punkt Q und eine beliebige Gerade g der geg. Ebene Σ gelegten Ebene Φ das Lot $QP \perp g$ und errichte in Σ auf g in P das Lot h, so ist das in Ebene (fh) von Q auf h gefällte Lot QX zugleich das Lot auf die geg. Ebene. Fig. 25.

63. 4. Beispiel. Zeichne die kürzeste Entfernung zweier windschiefen Geraden.

Fälle von einem beliebigen Punkt der einen Windschiefen g das Lot auf die durch h parallel g gelegte Ebene (h g') und verschiebe dieses Lot sich selbst parallel längs g bis zum Schnitt mit h. Fig. 24.

Was für eine Linie beschreibt hierbei der Fußpunkt des Lots?

Was ist der Ort aller Punkte, die von einer geg. Ebene eine geg. Entfernung haben? Antwort: Die beiderseitigen Parallelebenen im geg. Abstand.

64. 5. Beispiel. Gesucht der Ort aller Punkte, die von drei geg. Punkten gleiche Entfernungen haben.

Ist (ABC) die Ebene der drei Punkte und X ein Punkt des Orts, so fälle man, da es sich um Entfernungen des Punkts von Punkten der Ebene handelt, von X das Lot $XO \perp (ABC)$. Dann ist

$$\sphericalangle XOA = \sphericalangle XOB = \sphericalangle XOC = 90^\circ$$
$$AX = BX = CX$$

und XO gemeinschaftlich, daher

$$\triangle XOA \cong \triangle XOB \cong \triangle XOC$$

woraus

$$OA = OB = OC$$

d. h. O ist Umkreismittelpunkt des $\triangle ABC$. Alle Punkte X des gesuchten Orts haben daher die Eigenschaft, daß die von ihnen auf (ABC) gefällten Lote im Umkreismittelpunkt O dieses Dreiecks treffen; da aber in O auf (ABC) nur ein Lot möglich ist, so folgt:

Satz: Der Ort aller Punkte, welche von drei geg. Punkten gleiche Entfernungen haben, ist das im Umkreismittelpunkt des Dreiecks der drei Punkte auf der Ebene desselben errichtete Lot.

Verschiebt man XO sich selbst parallel durch die Mitte F der Seite BC in die Lage X'F, so ist:

$$CF \perp X'F \quad \text{und} \quad CF \perp OF \quad \text{daher} \quad CF \perp (XFO)$$

d. h. die durch XO und die Mitte einer Dreieckseite gelegte Ebene ist die Mittelotebene dieser Seite und somit

Satz: Die drei Mittellotebenen der Seiten eines beliebigen Dreiecks schneiden sich nach der im Umkreismittelpunkt des Dreiecks zur Ebene desselben senkrechten Geraden.

Die Eigenschaft der Mittellotebene als geometrischer Ort hätte demnach ebenso zur Lösung der Frage geführt.

Ist ein weiterer Punkt D gegeben, so trifft die Mittellotebene zu der Verbindungsgeraden dieses Punkts mit einem der drei anfänglich gegebenen, also etwa zu DA, das Lot im Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC in einem Punkt Y. Dann ist

$$YA = YB = YC = YD$$

d. h. die Mittellotebenen der sechs Verbindungsgeraden von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten schneiden sich in einem Punkt, der von diesen vier geg. Punkten gleiche Entfernungen hat.

Dieser Schnittpunkt ist somit der Mittelpunkt einer Kugel durch die vier geg. Punkte und daher

Satz: Eine Kugel ist bestimmt durch vier Punkte ihrer Fläche (allgemein, durch vier Bedingungen).

65. 6. Beispiel. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die von einem geg. Punkt eine geg. Entfernung hat.

Die gesuchte, durch g gelegte Ebene Σ, von welcher P den geg. Abstand $PX = d$ haben möge, ist als Ebene (Xg) bestimmt, sobald der Fußpunkt X gefunden ist. Nun bestimmen Punkt P und Gerade g in Ebene (Pg) das Lot

Fig. 26.

$$PA \perp g, \text{ ferner da } PX \perp \Sigma, \text{ auch } PX \perp g,$$

somit

$$(PAX) \perp g$$

d. h. man hat durch PA die zu g senkrechte Ebene zu legen, dann ist X die Spitze des in dieser Ebene über der Hypotenuse PA mit der Kathete $PX = d$ gezeichneten rechtwinkligen Dreiecks. Möglichkeit der Lösungen abhängig von $PA \gtreqless d$?

Senkrechte Ebenen.

66. Dreht sich die Ebene des rechten Winkels AXB um den Schenkel AX als feste Achse in die Lage AXC (Fig. 22) und beträgt die Drehung den n-ten Teil einer vollen Umdrehung, durch welche die Punkte der Ebene wieder in ihre ursprüngliche Lage kommen würden, so beträgt der von dem beweglichen Schenkel XB in der von ihm erzeugten zu AX senkrechten Ebene (BXC) beschriebene Winkel BXC den ebensovielten Teil von 360°. Keine andere zwei Gerade, als die in X zur Achse senkrechten BX und CX würden z. B. bei einer Viertelsdrehung der Ebene (AXB) einen rechten Winkel und zugleich bei einer halben Umdrehung dieser Ebene einen gestreckten Winkel bilden. Winkel BXC ist also das Maß für die Größe der Drehung der Ebenen (AXB) und (AXC) gegeneinander, daher

Satz: Der Winkel zweier Ebenen, der sogen. Keilwinkel, ist derjenige Winkel, den die in beiden Ebenen auf deren Schnittgerade in einem beliebigen Punkt derselben errichteten Lote miteinander einschließen.

Oder, da die Ebene der beiden Lote zur Schnittgeraden beider Ebenen senkrecht steht:

Jede zur Schnittgeraden zweier Ebenen senkrechte Ebene (Keilwinkelebene) schneidet die beiden Ebenen nach zwei Geraden, deren Winkel der Keilwinkel der beiden Ebenen ist.

Man erhält als Winkel zweier Ebenen zwei Keilwinkel, die Nebenwinkel sind.

67. Die in den Ebenen (AXB) und (BXC) zu XB in X Senkrechten XA und XF schließen den Keilwinkel dieser zwei Ebenen ein, somit, da XA gemäß 55) auf allen Graden der Ebene (BXC) senkrecht steht, also $\sphericalangle AXF = 90^{\circ}$ ist,

Satz: Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so steht auch jede durch die Gerade gelegte Ebene zu jener Ebene senkrecht.

68. Bestimmt man die Keilwinkel der Ebene (BXC) mit allen zu ihr senkrechten Ebenen, so sind die in diesen Ebenen liegenden Schenkel derselben sämtlich zu (BXC) senkrecht und daher parallel; AX ist somit eine gemeinschaftliche Hauptausdehnung aller zur Ebene (BXC) senkrechten Ebenen, daher

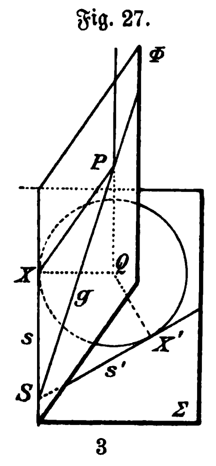
Satz: Die Schnittgeraden aller auf einer Ebene senkrechten Ebenen sind ebenfalls auf dieser Ebene senkrecht.

Oder: Steht eine Ebene auf zwei anderen senkrecht, so steht sie auf deren Schnittgeraden senkrecht.

Beispiele.

69. 1. Beispiel. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die mit einer geg. Ebene einen geg. Winkel bildet.

Fig. 27.



Fälle von einem beliebigen Punkt P der geg. Geraden g das Lot PX auf die Schnittgerade s der geg. Ebene Σ und der gesuchten durch g gehenden Ebene Φ; errichte in X auf s in Σ das Lot XQ, so ist $\sphericalangle PXQ$ der geg. Keilwinkel α.

Fälle $PQ \perp XQ$, dann ist auch, weil $(PXQ) \perp s$,
$PQ \perp s$ und somit $PQ \perp \Sigma$

Das rechtwinklige $\triangle PQX$ kann daher in einer Nebenzeichnung in wahrer Größe gezeichnet werden aus $\sphericalangle \alpha$ und der Gegenkathete PQ, der Entfernung des Punkts P von Σ. Dann ist der mit der anderen Kathete QX um den Fußpunkt Q des Lots PQ in Σ be-

schriebene Kreis geometrischer Ort für X und da $s \perp QX$, so ist s die, vom Schnittpunkt S der Geraden g und der Ebene Σ an diesen Kreis gezogene Tangente und daher (Ps) die gesuchte Ebene. Anzahl der Lösungen siehe Fig. 27.

70. 2. **Beispiel.** Ort aller Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden (Ebenen) gleiche Entfernungen haben?

Ist X ein Punkt des gesuchten Orts, also $XQ = XR$, wobei $XQ \perp g$ und $XR \perp h$, so fälle man, da es sich um Entfernungen jenes Punkts von den Geraden einer Ebene handelt, $XP \perp (gh)$, dann ist $\triangle XPQ \cong \triangle XPR$ und somit $PQ = PR$. Aber da $h \perp XP$, denn $XP \perp (gh)$, und $h \perp XR$, so

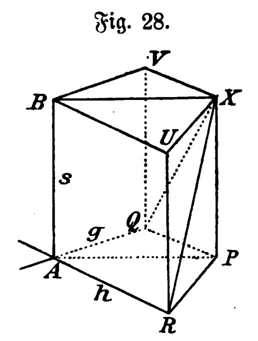
folgt $\quad h \perp (XPR)$ und entsprechend $g \perp (XPQ)$

somit $\quad h \perp PR \quad$ „ „ $\quad g \perp PQ$,

daher $\quad \sphericalangle PAR = \sphericalangle PAQ$

d. h. die Fußpunkte sämtlicher Lote, die von den Punkten X des gesuchten Orts auf die Ebene der geg. Geraden gefällt werden, sind Punkte der Halbierungsgeraden des Winkels beider Geraden, oder

Fig. 28.



Satz: Die senkrecht zur Ebene zweier Geraden durch die Halbierungsgeraden ihres Winkels gelegten Ebenen, die sogen. winkelhalbierenden Ebenen der Geraden, sind Ort aller Punkte, die von beiden Geraden gleiche Entfernungen haben.

Verschiebt man XP sich selbst parallel durch die Spitze A des Winkels der Geraden in die Lage s, so ist der Winkel der Geraden g und h zugleich der Keilwinkel der Ebenen (gs) und (hs):

Die durch die Schnittgerade zweier Ebenen und die Halbierungsgeraden ihrer Keilwinkel gelegten (zur Ebene derselben senkrechten) Ebenen heißen winkelhalbierende Ebenen der geg. Ebenen.

Fällt man von einem beliebigen Punkt X der winkelhalbierenden Ebene (XPA) der Ebenen (gs) und (hs) die Lote XV und XU auf letztere, so ist die Ebene (UXV) dieser Lote parallel Ebene (gh) und die Kongruenz der beiden von ihr erzeugten symmetrisch liegenden rechtwinkligen Dreiecke XUB und XVB ergiebt die Gleichheit der Lote selbst. Daher

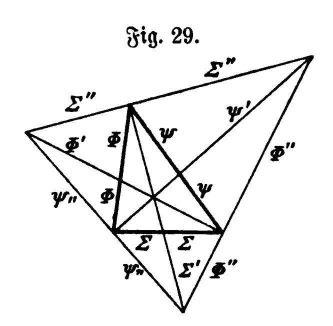
Satz: Die winkelhalbierenden Ebenen zweier geg. Ebenen sind Ort aller Punkte, die von den geg. Ebenen gleiche Entfernungen haben.

Da die Halbierungsgeraden der Keilwinkel zweier Ebenen aufeinander senkrecht stehen, so sind auch die winkelhalbierenden Ebenen letzterer zu einander senkrecht.

71. Bezeichnet man mit Φ', Ψ', Σ' bezw. Φ'', Ψ'', Σ'' die Halbierungsebenen der Keil- bezw. Nebenkeilwinkel der Ebenen $\Psi\Sigma$, $\Sigma\Phi$, $\Phi\Psi$, welch

letztere sich in O, dem Auge, treffen mögen, so ist gemäß 70) die durch O gehende Schnittgerade der Ebenen Φ' und Ψ' Ort aller Punkte, die von Φ, Ψ, Σ gleiche Entfernungen haben. Diese Schnittgerade gehört somit auch Σ', der dritten der in den inneren Winkelraum der Ebenen Φ, Ψ, Σ sich erstreckenden winkelhalbierenden Ebenen, an. Dieselbe Betrachtung für die Außenwinkelräume ergiebt drei weitere Geraden durch O, die Schnittgeraden je einer inneren winkelhalbierenden Ebene und derjenigen beiden äußeren, welche die diesem Innenwinkel nicht zugehörigen Außenkeile halbieren:

Fig. 29.



$$\Phi'\,\Psi''\,\Sigma'',\quad \Phi''\,\Psi'\,\Sigma'',\quad \Phi''\,\Psi''\,\Sigma'.$$

Daher

Satz: Ort sämtlicher Punkte, welche von drei geg. Ebenen gleiche Entfernungen haben, sind die durch den Schnittpunkt der geg. Ebenen gehenden vier Schnittgeraden, in denen sich die sechs winkelhalbierenden Ebenen der geg. Ebenen zu je dreien treffen.

72. Eine beliebige vierte Ebene Ω, die Zeichnungsebene, bildet mit den drei geg. Ebenen Φ, Ψ, Σ eine dreiseitige Pyramide, auch Tetraeder genannt. Die den Innenraum desselben schneidende Halbierungsebene des Keils $\Omega\,\Phi$ trifft die Schnittgerade ($\Phi'\,\Psi'\,\Sigma'$) in einem Punkt, der von sämtlichen vier Tetraederebenen gleiche Entfernungen hat. Durch ihn gehen somit die ebenfalls den Innenraum schneidenden winkelhalbierenden Ebenen der Keile $\Omega\,\Psi$ und $\Omega\,\Sigma$. Aus denselben Gründen schneiden sich die Halbierungsebenen der Außenkeile von Ω mit Φ, Ψ, Σ, die demselben von letzteren Ebenen gebildeten Innenwinkelraum angehören, in einem zweiten Punkt der von der Tetraederecke O ausgehenden Schnittgeraden ($\Phi'\,\Psi'\,\Sigma'$). Setzt man diese Betrachtung für die anderen Tetraederecken fort, so folgt der

Satz: Die zwölf winkelhalbierenden Ebenen von vier beliebigen, nicht durch einen Punkt gehenden Ebenen schneiden sich zu je sechs in vier Punkten, die von den geg. Ebenen gleiche Entfernungen haben.

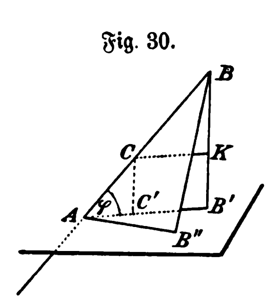
Orthogonalprojektion oder senkrechte Parallelperspektive.

73. Die besondere Art der Parallelperspektive, bei welcher die Projektionsstrahlen nicht schräg, sondern senkrecht (orthogonal) zur Projektions- oder Bildebene auffallen, heißt Orthogonalprojektion oder kurzweg „Projektion". Spricht man von der Projektion eines Punktes schlechtweg, so versteht man darunter stets den Fußpunkt des vom Punkt auf die Bildebene gefällten Lotes. Für die Orthogonalprojektion gelten die früher entwickelten Gesetze der Parallelperspektive.

Winkel einer Geraden mit einer Ebene.

74. Eine Gerade bildet mit einer Ebene, d. h. mit den unendlich vielen Geraden derselben, die verschiedensten Winkel. Ist AB′ die Projektion der Strecke AB auf diese Ebene, die mit AB den einen Endpunkt A gemein haben möge, so hat unter allen Dreiecken mit derselben Seite AB und der ebenfalls gleichen, auf den Strahlen des Büschels A der Ebene von A aus abgeschnittenen zweiten Seite AB′ = AB″ = · · · · das in der projizierenden Ebene der Strecke AB liegende △ AB′B die kleinste dritte Seite BB′ ∠ BB″ ∠ u. s. f. Ihr liegt daher auch der kleinste Winkel ∢ BAB′, gegenüber. Man ist übereingekommen diesen kleinsten Winkel als den Winkel der Geraden AB mit der Ebene zu bezeichnen. Daher

Fig. 30.



Satz: Unter dem Winkel einer Geraden mit einer Ebene versteht man den Winkel dieser Geraden mit ihrer Projektion auf die Ebene. Er ist unter sämtlichen Winkeln, welche die Gerade mit der Ebene bildet, der kleinste.

75. Ist φ der Winkel, den die Gerade AB mit Ebene Σ bildet, so ist die Projektion B′C′ irgend einer Strecke BC jener Geraden

$$B'C' \# CK = BC \,.\, \cos\varphi$$

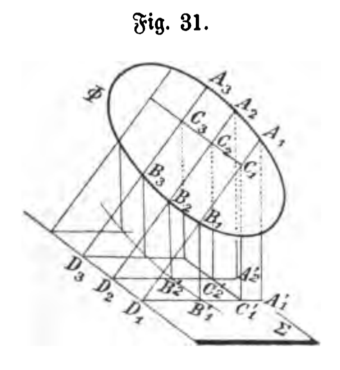
Sind die projizierenden Lote BB′ und CC′ der Endpunkte der Strecke BC gegeben, so findet man Neigungswinkel und Projektion dieser Strecke, wenn man das Trapez BB′C′C in wahrer Größe zeichnet. Für die Berechnung ist

$$\sin\varphi = \frac{BB' - CC'}{BC}$$

Flächenbeziehungen.

76. Projiziert man irgend ein Flächenstück F der Ebene Φ auf die Bildebene Σ in der bestimmten Weise, daß man in den unendlich vielen und unendlich benachbarten, zur Schnittgeraden D_1D_3 beider Ebenen und somit auch zu Σ senkrechten, projizierenden Ebenen $A_1D_1A_1'$ . . . auf deren Schnittgeraden mit Σ vom Umfang der Fläche F die Lote A_1A_1', B_1B_1' . . . fällt, so schneiden je zwei aufeinanderfolgende, unendlich benachbarte Ebenen $A_1D_1A_1'$ und $A_2D_2A_2'$, da sie parallel sind, aus F und seiner Projektion F′ zwei unendlich schmale, zwischen $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ und $A_1'B_1' \parallel A_2'B_2'$ liegende Flächenstreifen, sogen. Flächenelemente, $A_1B_1B_2A_2$ und dessen Projektion $A_1'B_1'B_2'A_2'$ aus, die als Trapeze be-

Fig. 31.



trachtet werden können, da die unendlich kleinen Bögen A_1A_2, B_1B_2, $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$ mit ihren Sehnen verwechselt werden dürfen. Der Abstand C_1C_2 der Parallelseiten A_1B_1 und A_2B_2, die sogen. Höhe des Trapezes $A_1B_1B_2A_2$, ist parallel s, also auch parallel Σ, projiziert sich somit auf Σ in wahrer Größe als Höhe des Trapezes $A_1'B_1'B_2'A_2'$. Entsprechende Trapeze haben also gleiche Höhen. Da jede Parallelseite des Trapezes mit ihrer Projektion denselben Winkel, den Keilwinkel $A_1D_1A_1' = \varphi$ der Ebenen Φ und Σ einschließt, so sind, wenn die Parallelseiten bezw. Höhen der sich folgenden Trapeze in Φ mit $u_1u_2u_3\ldots$ bezw. $h_1h_2h_3\ldots$ bezeichnet werden, die entsprechenden Trapezseiten der Projektion $u_1\cos\varphi$, $u_2\cos\varphi$, $u_3\cos\varphi\ldots$ und somit, da sich F und F' aus ihren unendlich vielen Elementen zusammensetzen,

$$F = \frac{u_1 + u_2}{2} \,.\, h_1 + \frac{u_2 + u_3}{2} \,.\, h_2 + \ldots$$

$$F' = \frac{u_1\cos\varphi + u_2\cos\varphi}{2} h_1 + \frac{u_2\cos\varphi + u_3\cos\varphi}{2} h_2 + \ldots$$

$$= \cos\varphi\left(\frac{u_1 + u_2}{2} h_1 + \frac{u_2 + u_3}{2} h_2 + \ldots\right)$$

oder

$$F' = \cos\varphi \,.\, F$$

In Worten:

Satz: Die Projektion eines beliebigen ebenen Flächenstücks auf eine unter dem Winkel φ geneigte Bildebene ist $\cos\varphi$mal so groß.

Diese Art der Berechnung eines Gebildes (Linie, Fläche, Körper) als Summe seiner unendlich vielen, unendlich kleinen gleichartigen Elemente heißt Exhaustionsmethode (exhaustare = ausschöpfen).

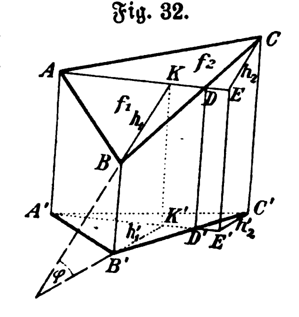


Fig. 32.

Andere Lösung: Es ist stets möglich, die Fläche Δ jedes beliebigen Dreiecks ABC mittels einer durch eine seiner Ecken gelegten Parallelebene zur Bildebene in zwei Teildreiecke f_1 und f_2 zu zerlegen. Die Schnittgerade $AD = s$ beider Ebenen projiziert sich, da sie der Bildebene parallel ist, in wahrer Größe. Betrachtet man sie als gemeinschaftliche Grundseite der Teildreiecke, so sind die projizierenden Ebenen der Höhen $h_1 \perp s$ und $h_2 \perp s$ beider Teildreiecke Keilwinkelebenen der Dreiecks- und Bildebene, daher sind die Projektionen dieser Höhen, wenn φ der Keilwinkel, gemäß 75)

$$h_1' = h_1\cos\varphi \qquad h_2' = h_2\cos\varphi$$

und die Projektionen f_1' und f_2' der Flächen der Teildreiecke

$$f_1' = \frac{s \,.\, h_1'}{2} \qquad f_2' = \frac{s \,.\, h_2'}{2}$$

somit die Projektion Δ' der Dreiecksfläche Δ

$$\varDelta' = f_1' + f_2' = \frac{s \,.\, h_1'}{2} + \frac{s \,.\, h_2'}{2} = \frac{s \,.\, h_1 \cos\varphi}{2} + \frac{s \,.\, h_2 \cos\varphi}{2}$$

$$= \cos\varphi \left(\frac{s\,h_1}{2} + \frac{s\,h_2}{2}\right) = \cos\varphi\,(f_1 + f_2)$$

$$= \cos\varphi \,.\, \varDelta.$$

Nun läßt sich jedes beliebige Vieleck F von einer Ecke aus in n—2 Dreiecke $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3 \ldots$ zerlegen, deren jedes durch Parallelebenen zur Bildebene selbst wieder in zwei Teildreiecke zerfällt, daher nach dem obigen Satz:

$$\varDelta_1' = \cos\varphi \,.\, \varDelta_1$$
$$\varDelta_2' = \cos\varphi \,.\, \varDelta_2$$
$$\cdots\cdots$$

somit

$$\varDelta_1' + \varDelta_2' + \ldots = \cos\varphi\,(\varDelta_1 + \varDelta_2 + \ldots)$$

oder

$$F' = \cos\varphi \,.\, F$$

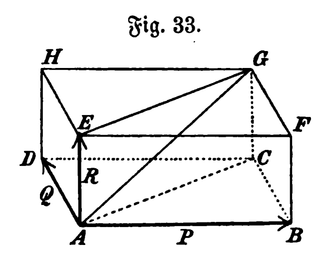
und da jedes von einer beliebigen Linie umgrenzte ebene Flächenstück F als Vieleck mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten betrachtet werden kann, dessen Teildreiecke $\varDelta_1$, $\varDelta_2 \ldots$ zu unendlich kleinen Flächenelementen werden, so gilt der Satz auch für ein solches Flächenstück.

Beispiele.

77. 1. Beispiel. Diejenige Kraft (Resultante) zu zeichnen und zu berechnen, welche drei zu einander senkrechte, in einem Punkt A angreifende Kräfte P, Q, R ersetzt.

Nach dem Satz über das Parallelogramm der Kräfte ersetzt die Diagonale AC des aus AB = P und AD = Q gezeichneten Rechtecks ABCD beide Kräfte P und Q. Die gesuchte Resultante AG = X ergiebt sich somit als Diagonale des aus AC und der dritten Kraft CG = R gezeichneten Rechtecks ACGE. Die Resultante ist somit Diagonale des über dem Rechteck ABCD errichteten senkrechten Prismas, eines sogen. Quaders mit der senkrechten Kante R. Nach dem pythagoräischen Satz ist:

Fig. 33.



$$X^2 = AC^2 + CG^2 \text{ und } AC^2 = P^2 + Q^2$$

somit

$$X^2 = P^2 + Q^2 + R^2 \text{ und } X = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$$

Die Resultante kann aus den geg. Kräften in einer einzigen Zeichnungsebene gezeichnet werden mittels der rechtwinkligen Dreiecke ABC und ACG, wenn letzteres um AC in die Ebene des ersteren umgeklappt wird.

Die Richtung der Resultante, d. h. ihre Winkel α, β, γ mit den drei geg. Kräften ergeben sich aus den rechtwinkligen Dreiecken

$$\triangle ABG \ldots \cos\alpha = \frac{AB}{AG} = \frac{P}{X}$$

$$\triangle ADG \ldots \cos\beta = \frac{AD}{AG} = \frac{Q}{X}$$

$$\triangle AEG \ldots \cos\gamma = \frac{AE}{AG} = \frac{R}{X}$$

und da

$$\left(\frac{P}{X}\right)^2 + \left(\frac{Q}{X}\right)^2 + \left(\frac{R}{X}\right)^2 = \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{X^2} = \frac{X^2}{X^2} = 1$$

so folgt

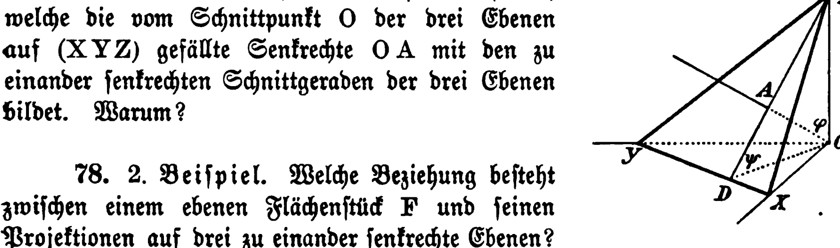
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

d. h.

Satz: Die Summe der Quadrate der Kosinusse der Winkel, die eine Gerade mit drei zu einander senkrechten Geraden bildet, ist gleich eins.

Derselbe Satz gilt auch für die Winkel, die eine Ebene (XYZ) mit drei zu einander senkrechten Ebenen bildet, denn diese Winkel sind dieselben, welche die vom Schnittpunkt O der drei Ebenen auf (XYZ) gefällte Senkrechte OA mit den zu einander senkrechten Schnittgeraden der drei Ebenen bildet. Warum?

Fig. 34.



78. 2. Beispiel. Welche Beziehung besteht zwischen einem ebenen Flächenstück F und seinen Projektionen auf drei zu einander senkrechte Ebenen?

Sind α, β, γ die Winkel der Ebene von F mit den drei senkrechten Projektionsebenen, so sind die Flächen der Projektionen auf letztere:

$$F_1 = \cos\alpha \,.\, F \qquad F_2 = \cos\beta \,.\, F \qquad F_3 = \cos\gamma \,.\, F$$

woraus durch Quadrieren und Addieren

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \,.\, F^2$$

und somit gemäß 77)

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F^2$$

d. h.

Satz: Das Quadrat der Fläche eines beliebig umgrenzten Teils einer Ebene ist gleich der Summe der Quadrate der Projektionen dieser Fläche auf drei zu einander senkrechte Ebenen.

Dieser dem Pythagoras analoge Satz läßt sich vielfach zur Lösung algebraischer Aufgaben benützen, z. B.: Betrachtet man in Fig. 34 die rechtwinkligen Dreiecke, welche von der Ebene des $\triangle XYZ$ auf den drei zu einander senkrechten Ebenen bestimmt werden, als Projektionen des $\triangle XYZ$, so ist

$$(\triangle XYZ)^2 = (\triangle YOZ)^2 + (\triangle ZOX)^2 + (\triangle XOY)^2 \quad . \quad . \quad 1)$$

Ist $OX = a$, $OY = b$, $OZ = c$, so sind die Seiten des Dreiecks XYZ

$$YZ = \sqrt{b^2 + c^2} = u,\ ZX = \sqrt{c^2 + a^2} = v,\ XY = \sqrt{a^2 + b^2} = w$$

und die

Fläche des $\Delta XYZ = \sqrt{s(s-u)(s-v)(s-w)}$ wobei $s = \frac{u + v + w}{2}$

und die Beziehung 1) ergiebt, wenn die Flächen sämtlicher Dreiecke in a, b, c berechnet sind, daß das Produkt der vier Klammern:

$$(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{a^2+b^2})(-\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{a^2+b^2})$$

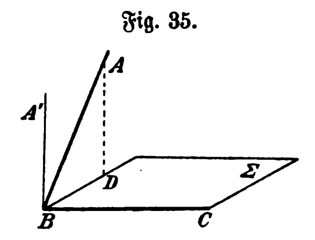
$$(\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{a^2+b^2})(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}-\sqrt{a^2+b^2})$$

$$= 16\left[\left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ca}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2\right] = 4\,(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)$$

Probe durch Ausmultiplizieren der Klammergrößen!

79. 3. Beispiel. Gesucht die Projektion eines rechten Winkels auf eine zu einem seiner Schenkel parallele Ebene.

Fig. 35.



Verschiebe die zum Schenkel BC des rechten Winkels ABC parallele Ebene Σ sich selbst parallel durch diesen Schenkel und fälle auf sie von einem beliebigen Punkt A des anderen Schenkels das Lot AD, so ist $\sphericalangle DBC$ die Projektion des Rechten auf Σ. Gleitet AD sich selbst parallel längs AB durch die Spitze des rechten Winkels nach A'B, so bleibt $A'B \perp \Sigma$, daher ist

$$A'B \perp BC \quad \text{und da auch} \quad AB \perp BC, \quad \text{so folgt} \quad (ABD) \perp BC,$$

somit

$$BD \perp BC \quad \text{oder} \quad \sphericalangle DBC = 90^0$$

und daher

Satz: Ein rechter Winkel projiziert sich auf jede zu einem seiner Schenkel parallele Ebene wieder als Rechter.

80. 4. Beispiel. Eine Ebene zu zeichnen, die mit drei beliebigen windschiefen Geraden gleiche Winkel bildet.

Verschiebt man die Windschiefen f, g, h sich selbst parallel durch einen beliebigen Punkt P und projiziert sie alsdann auf die gesuchte Ebene Σ, so ist nach Voraussetzung

$$\sphericalangle PAO = \sphericalangle PBO = \sphericalangle PCO$$

und da PO gemeinsam und auf allen durch den Fußpunkt O in Σ gezogenen Geraden senkrecht steht, so folgt

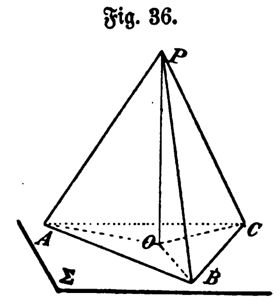
$$\triangle POA \cong \triangle POB \cong \triangle POC$$

und somit

$$PA = PB = PC$$

Die Ebene der Endpunkte A, B, C dreier parallel den geg. Geraden von einem beliebigen Punkt ausstrahlender Strecken von beliebiger, aber gleicher Länge ist die gesuchte. Es giebt vier Parallelscharen von Ebenen, die der Aufgabe genügen, welche?

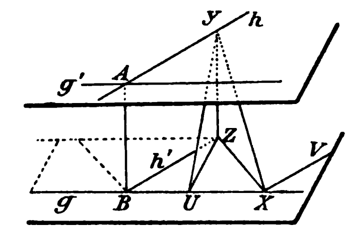
Fig. 36.



81. 5. Beispiel. Eine Strecke von geg. Länge so zwischen zwei geg. windschiefe Gerade zu legen, daß sie mit einer derselben einen geg. Winkel bildet.

Ist XY die gesuchte Lage der Strecke a, die mit g den $\sphericalangle \alpha$ bilden möge, so bestimmt das Lot $YU \perp g$ das rechtwinklige $\triangle XUY$, das in einer Nebenfigur aus Hypotenuse und einem spitzen Winkel in wahrer Größe gezeichnet werden kann. Fällt man von Y das Lot YZ auf die durch g zur anderen Windschiefen h parallel gelegten Ebene (gh'), so bestimmt diese kürzeste Entfernung der geg. Windschiefen mit YU ein zweites rechtwinkliges $\triangle YZU$. Nun ist

Fig. 37.



$$\begin{array}{l} g \perp UY \\ g \perp YZ \\ \hline g \perp (UYZ) \end{array}$$

und somit

$$g \perp UZ$$

Die in (gh') zu g im Abstand UZ gezogene Parallele trifft die Projektion von h auf jene Ebene in einem Punkt Z, der die Projektion des Punktes Y ist. Der Kreis um Y mit a in Ebene (Yg) ergiebt X. Anzahl der Lösungen abhängig von $YZ \lesseqgtr a$?

Ist statt der Angabe des $\sphericalangle \alpha$ die Bedingung gestellt, daß XY mit den geg. Windschiefen gleiche Winkel bilde, so ziehe man $XV \parallel h'$ in Ebene (gh'), dann ist

$$\begin{array}{ll} \sphericalangle AYX = \sphericalangle BXY & \text{nach Voraussetzung,} \\ \sphericalangle AYX = \sphericalangle VXY & \text{innere Wechselwinkel,} \\ \hline \sphericalangle BXY = \sphericalangle VXY & \end{array}$$

XY bildet also mit XU und XV gleiche Winkel; die zu Ebene (BXV) senkrechte Ebene (XZY) ist somit gemäß 70) Halbierungsebene des Winkels UXV und daher

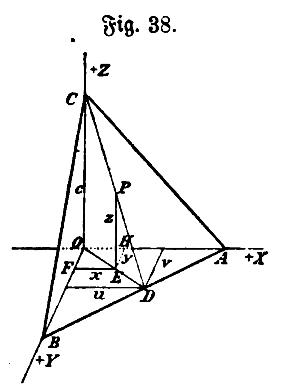
$$\sphericalangle BXZ = \sphericalangle VXZ$$

Damit ist XZ auch der Richtung nach bestimmt. Halbiert man daher $\sphericalangle gh'$

in Ebene (gh'), so schneidet die Parallele zu g durch den Endpunkt der von der Winkelspitze B aus auf dieser Halbierungsgeraden abgetragenen Kathete XZ des in einer Nebenfigur in wahrer Größe gezeichneten rechtwinkligen Dreiecks XYZ die Projektion h' von h im Punkt Z u. s. f. Abhängigkeit der Lösungen?

82. 6. Beispiel. Eine beliebige Ebene schneide auf drei zu einander senkrechten, sich in einem Punkt schneidenden Geraden die vom gemeinsamen Schnittpunkt O aus gemessenen Strecken a, b, c ab. Welche Beziehung besteht zwischen diesen Strecken und den ihnen parallelen Abständen x, y, z eines beliebigen Punktes P dieser Ebene von den zu einander senkrechten Ebenen jener drei Geraden?

Fig. 38.



Verbinde P mit dem Endpunkt C der Strecke c bis zum Schnitt mit der Spur oder Schnittgeraden AB der schneidenden Ebene (ABC) und der Ebene (AOB) in D, dann sind PE ⊥ OD, EH ⊥ OA, EF ⊥ OB die Abstände z, y, x des Punktes P und es ist

$$\frac{DO}{DE} = \frac{c}{z} \text{ oder } \frac{DO}{DO - DE} = \frac{DO}{EO} = \frac{c}{c - z}$$

und daher, wenn von D die Lote u ⊥ OB und v ⊥ OA gefällt werden

$$\frac{u}{x} = \frac{c}{c - z} \text{ und } \frac{v}{y} = \frac{c}{c - z} \quad \dots\dots \quad 1)$$

Nun ist

$$\frac{u}{a} = \frac{BD}{BA} \text{ und } \frac{v}{b} = \frac{AD}{AB}$$

woraus durch Addition

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad 2)$$

und daher, wenn für u und v die Werte aus 1) eingesetzt werden,

$$\frac{c}{c - z} \cdot \frac{x}{a} + \frac{c}{c - z} \cdot \frac{y}{b} = 1$$

umgeformt

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{c - z}{c} = 1 - \frac{z}{c}$$

oder

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad 3)$$

Dies ist der algebraische Ausdruck für die geometrische Eigenschaft, daß nur diejenigen Punkte, deren Abstände x, y, z die Gleichung 3) befriedigen, in der durch die Strecken a, b, c, die sogen. Achsenabschnitte, bestimmten Ebene liegen; alle Punkte, deren Abstände x, y, z die Gleichung 3) nicht befriedigen, liegen außerhalb der Ebene. Man heißt daher 3) die „Gleichung der Ebene".

1. Frage: Liegt der Punkt mit den Abständen 7, 4, 2 in der Ebene mit den Achsenabschnitten 10, 15, 60?

2. Frage: Welche Achsenabschnitte hat die Ebene $mx + my + pz = q$?

Bringt man die Gleichung auf die Form 3)

$$\frac{x}{\frac{q}{m}} + \frac{y}{\frac{q}{n}} + \frac{z}{\frac{q}{n}} = 1$$

so sind $\frac{q}{m}, \frac{q}{n}, \frac{q}{p}$ die gesuchten Abschnitte.

3. Frage: Welche Bedeutung haben die aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

berechneten Werte von x, y, z?

Da sie sämtliche drei Gleichungen befriedigen, so stellen sie, wenn man 4) als die Gleichungen dreier Ebenen betrachtet, die Abstände des gemeinsamen Schnittpunktes dieser drei Ebenen von den Hauptachsenebenen dar.

Methode der „Darstellenden Geometrie“.

Gaspard Monge 1746—1818 in Paris.

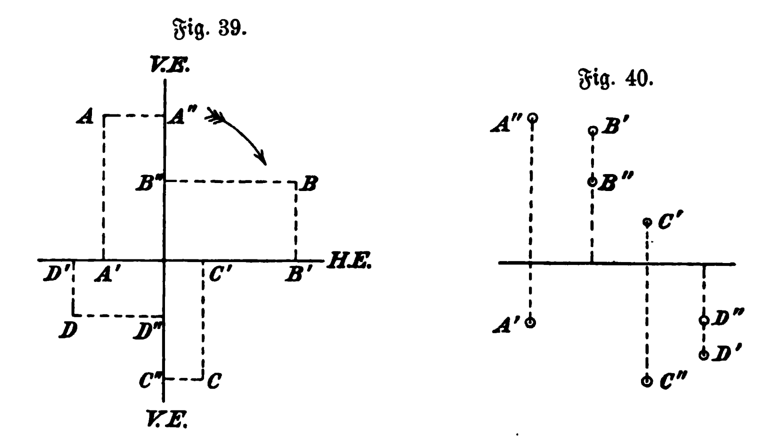
83. Bildet man einen Gegenstand auf zwei zu einander senkrechte, ein für allemal festgelegte Ebenen, die sogen. Grundebenen, orthogonal ab und wählt die Grundebenen insbesondere horizontal (wagrecht) und vertikal (aufrecht), weshalb man sie auch als Horizontalebene H.E. und Vertikalebene V.E. bezeichnet, klappt alsdann die Vertikalprojektion V.P., den sogen. Aufriß, um die Schnittgerade beider Grundebenen, die sogen. Achse oder den Riß, in die Ebene der Horizontalprojektion H.P., des sogen. Grundrisses, welche Zeichnungsebene ist, so lassen sich, da die H.P. alle horizontalen und die V.P. alle vertikalen Größenverhältnisse in wahrer Größe wiedergiebt, aus der auf einem einzigen Zeichenblatt ausgeführten Zeichnung des Grund- und Aufrisses eines Gegenstandes (in verkleinertem Maßstab bisweilen) sämtliche horizontalen und vertikalen Größenverhältnisse desselben in wahrer Größe entnehmen, d. h. der Gegenstand ist in wahrer Größe und bezüglich beider Grundebenen in ganz bestimmter Stellung dargestellt. Daher für die gesamte Technik die Bedeutung des Grund- und Aufrißzeichnens, dessen weiteren Ausbau die darstellende Geometrie (beschreibende oder deskriptive Geometrie) zum Gegenstand hat.

Steht eine Ebene des abzubildenden Körpers senkrecht zu beiden Grundebenen, so projiziert sich alles in ihr in eine zum Riß senkrechte Gerade. Um daher auch Zeichnungen in Ebenen von solcher Stellung darstellen zu können, benützt man eine dritte zu den beiden ersten senkrechte Projektionsebene, die sogen.

Seiten- oder Kreuzrißebene, die ebenfalls um ihre Schnittgerade mit der Grundrißebene in letztere umgeklappt wird, da nur eine einzige Zeichnungsebene benützt werden soll.

84. Darstellung eines Punkts.

Die Grundebenen teilen den Raum in vier Teile, Quadranten genannt. Die in den vier Quadranten liegenden Punkte A, B, C, D seien senkrecht auf die Grundebenen projiziert. Dreht man alsdann die V.E., von der rechten Seite des Risses aus betrachtet, im Sinn des Uhrzeigers um 90° in die H.E. (Fig. 39 senkrecht zum Riß), so kommen H.P. und V.P. jedes Punkts auf eine zum Riß



senkrechte Gerade der Zeichnungsebene, das sogen. Projektionslot, zu liegen, teils ober- teils unterhalb des Risses, abhängig vom Quadranten, in welchem der betreffende Punkt liegt, da bei der Drehung der einen Grundebene in die andere die obere V.E. mit der hinteren H.E. und die untere V.E. mit der vorderen H.E. sich deckt. Die Punkte A, B, C, D im Raum sind somit in einer einzigen Ebene, (Fig. 40) dargestellt durch ihre Projektionen (A'A''), (B'B''), (C'C''), (D'D'') und somit

Satz: Jeder beliebige Punkt im Raum ist bezüglich der H.E. und V.E. durch seine H.P. und V.P., deren Verbindungsgerade zum Riß senkrecht steht, eindeutig in der Ebene dargestellt.

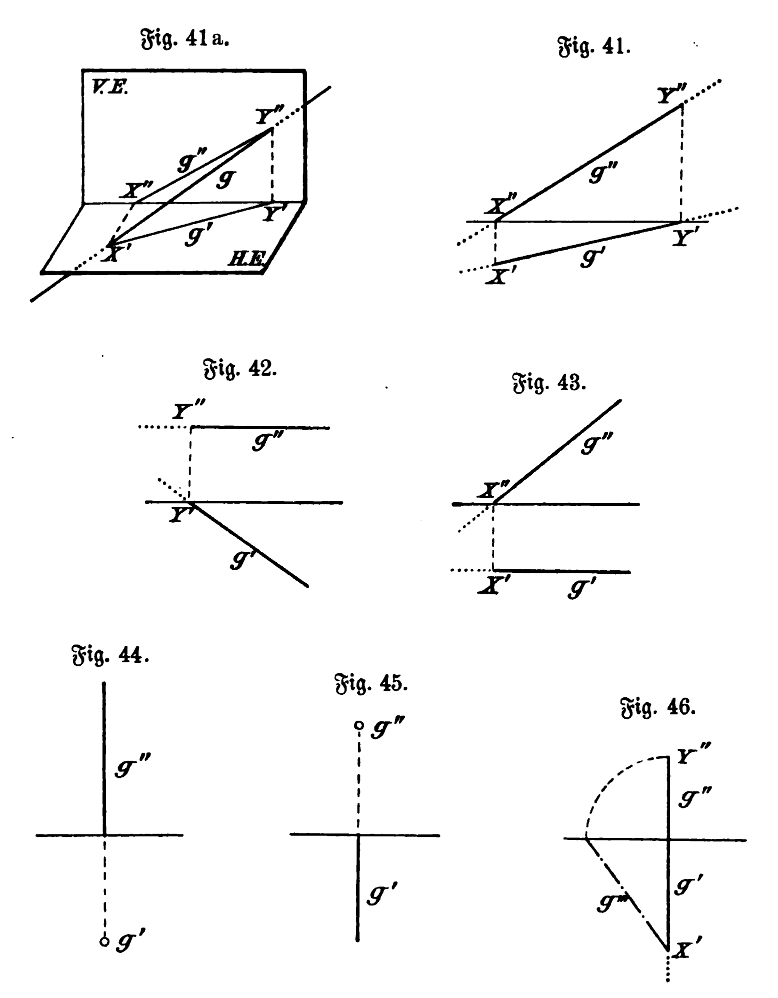
Die Entfernungen der Projektionen eines Punktes vom Riß sind zugleich die Abstände des Punktes im Raum von den beiden Grundebenen.

85. Darstellung der Geraden und ihrer Schnittpunkte mit den Grundebenen, der sogen. Spuren der Geraden.

Fig. 41: Beliebige Gerade (g'g''); in Fig. 41a perspektiv dargestellt.

Fig. 42: Gerade || H.E. Fig. 43: Gerade || V.E. Fig. 44: Gerade ⊥ H.E. Fig. 45: Gerade ⊥ V.E. Fig. 46: Gerade ⊥ Riß: Hier ist die Seitenprojektion

anzugeben, da die senkrecht zum Riß gezeichnete Gerade auch zugleich die zum Riß senkrechte Ebene, also unendlich viele im Raum zum Riß senkrechte Geraden darstellt.



86. Darstellung der Ebene durch ihre Schnittgeraden mit den Grundebenen, die sogen. Spuren der Ebene.

Fig. 47: Beliebige Ebene. Fig. 48: Ebene || H.E. Fig. 49: Ebene || V.E. Fig. 50: Ebene ⊥ H.E. Fig. 51: Ebene ⊥ V.E.

Die Spuren jeder Ebene schneiden sich auf dem Riß nach dem Satz über den Schnitt dreier Ebenen. Hieran ändert auch die Umklappung nichts.

∢ s O t der Zeichnung ist nicht der Winkel der Spuren im Raum. Führe den Nachweis bei Fig. 50 und Fig. 51.

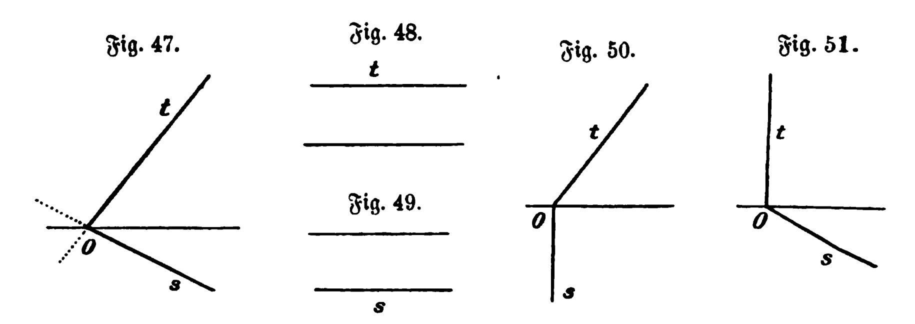


Fig. 47. Fig. 48. Fig. 49. Fig. 50. Fig. 51.

87. Satz: Sind Geraden parallel, so sind auch ihre Projektionen parallel. Sind Ebenen parallel, so sind auch ihre Spuren parallel.

Beweis nach dem Satz über den Schnitt paralleler Ebenen durch eine schiefe.

88. Allgemeine Lagenbeziehungen zwischen Punkt, Gerade und Ebene, in deskriptiver Art gezeichnet:

a) In Ebene (s O t) eine beliebige Gerade (g′ g″) zu ziehen:

Alle Geraden einer Ebene haben ihre Spuren in den gleichnamigen Spuren der Ebene, gemäß 5. (Fig. 52.)

Durch Punkt (P′ P″) eine beliebige Gerade (g′ g″) zu ziehen. (Fig. 53.)

Fig. 52.

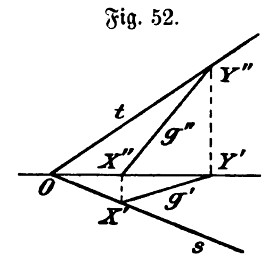


Fig. 53.

b) Zu untersuchen, ob

ein geg. Punkt (P′ P″) in einer geg. Ebene (s O t) liegt.

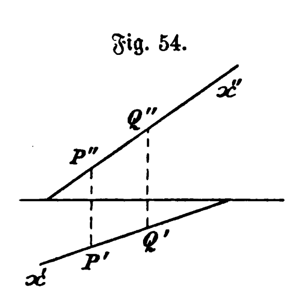
eine geg. Ebene (s O t) durch einen geg. Punkt (P′ P″) geht.

Ziehe in der V.E. durch P″ die Vertikalprojektion X″ Y″ einer beliebigen, durch den Punkt gehenden Geraden der Ebene, so muß P′ auf der Horizontalprojektion X′ Y′ dieser Geraden liegen.

c) Zwei Punkte (P′ P″) und (Q′ Q″) bestimmen eine Gerade, ihre Verbindungsgerade (x′ x″). (Fig. 54.)

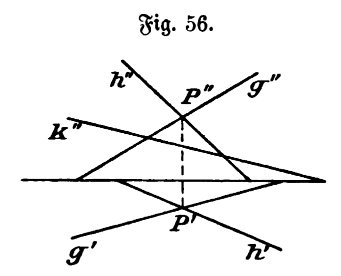
Zwei Ebenen (s O t) und (u M v) bestimmen eine Gerade, ihre Schnittgerade (x′ x″). (Fig. 55.)

Fig. 54.



d) Zwei Gerade (g' g'') und (h' h'') schneiden sich in einem Punkt (P' P'') oder sie sind windschief, wie (g' g'') und (h' k''). (Fig. 56.)

Fig. 56.



e) Ein Punkt und eine Gerade bestimmen eine Ebene.

Ein beliebiger Punkt (Q' Q'') der geg. Geraden bestimmt mit dem geg. Punkt (P' P'') eine zweite Gerade der gesuchten Ebene. Die Verbindungsgeraden der gleichnamigen Spuren beider Geraden sind die Spuren der gesuchten Ebene. (Fig. 58.)

Fig. 58.

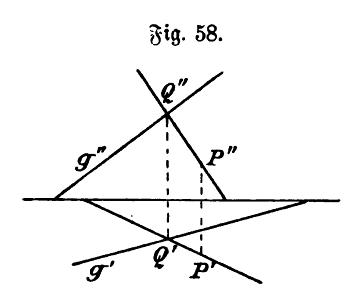
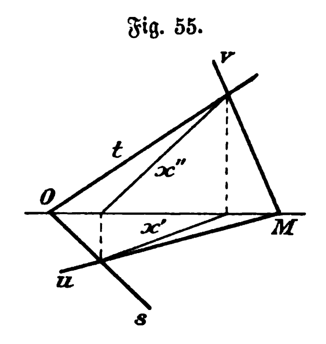
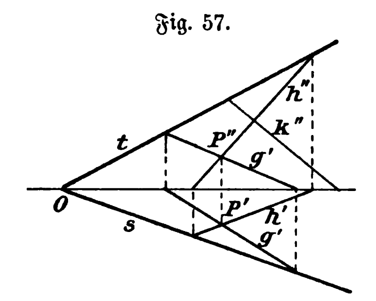


Fig. 55.



Zwei Gerade (g' g'') und (h' h'') bestimmen eine Ebene (O s t) oder sie sind windschief, wie (g' g'') und (h' k''). (Fig. 57.)

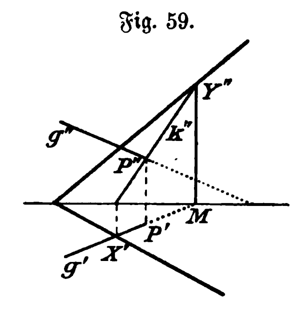
Fig. 57.



Eine Ebene und eine Gerade bestimmen einen Punkt, den Schnittpunkt.

Lege durch die geg. Gerade (g' g'') eine beliebige Ebene, am einfachsten die vertikalprojizierende Ebene (X' M Y''), welche die geg. Ebene nach der Geraden (g' k'') schneidet. Diese trifft (g' g'') im gesuchten Punkt (P' P'').

Fig. 59.



f) Besondere Fälle:

1. Einen geg. Punkt ($P' P''$) mit einem unendlich fernen Punkt, geg. durch seine Richtungsgerade ($g' g''$) zu verbinden, mit anderen Worten: Parallele zu ($g' g''$) durch ($P' P''$). (Fig. 60.)

Ziehe $x'' \parallel g''$ durch P'' und $x' \parallel g'$ durch P'. Begründung durch 87).

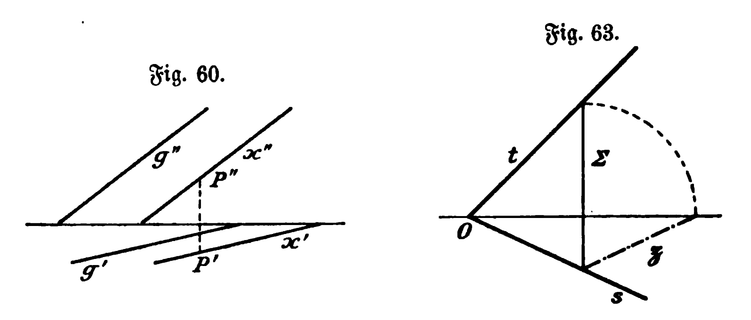


Fig. 60. Fig. 63.

2. Eine geg. Ebene durch eine Horizontalebene Φ und durch eine zur V.E. parallele Ebene Ψ zu schneiden.

($x' \Phi$) und ($\Psi y''$) sind die gesuchten Geraden. (Fig. 61 u. 62.)

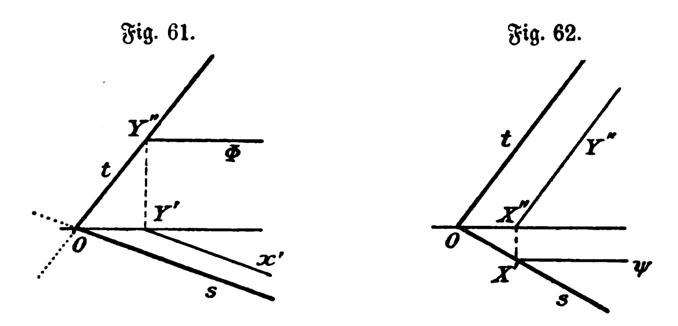


Fig. 61. Fig. 62.

3. Schnitt der Ebene ($s O t$) mit einer zum Riß senkrechten Ebene Σ.

Betrachte Σ als Kreuzrißebene gemäß 83), dann ist z die Umklappung der Schnittgeraden in die H.E. (Fig. 63.)

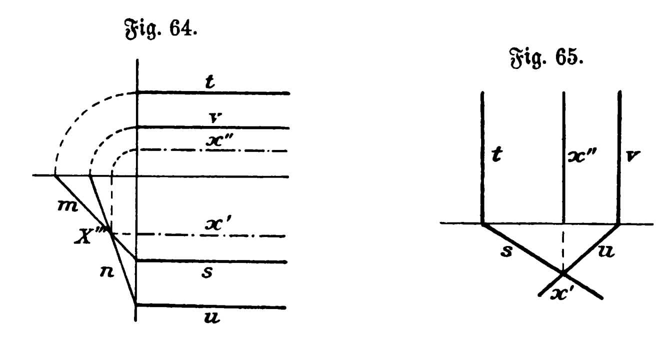


Fig. 64. Fig. 65.

4. Schnitt zweier, zum Riß paralleler Ebenen (s t) und (u v).

Benütze eine, zum Riß senkrechte Ebene als Kreuzrißebene. Dann sind m und n die Schnittgeraden derselben mit den geg. Ebenen in der Umklappung nach links und der Schnittpunkt X‴ von m und n ist die seitliche Projektion der gesuchten Geraden (x′ x″). (Fig. 64.)

5. Schnitt zweier Vertikalebenen.

Ihre Schnittgerade ist selbst vertikal. (Fig. 65.)

6. Gegeben zwei Ebenen, deren Vertikalspurenschnittpunkt unzugänglich sei. Die Vertikalprojektion der Schnittgeraden zu zeichnen. (Fig. 66.)

Schneide die geg. Ebenen durch eine beliebige dritte Ebene, am besten eine Horizontalebene, und bestimme den gemeinsamen Schnittpunkt (S′ S″) der drei Ebenen. Dann ist die gesuchte Gerade die V.P. der Verbindungsgeraden dieses gemeinsamen Schnittpunkts mit dem Schnittpunkt (U′ U″) der Horizontalspuren der geg. Ebenen.

Geg. zwei Punkte (P′ P″) und (Q′ Q″), deren Vertikalprojektionen nicht verbunden werden können (wegen irgend eines Hindernisses zwischen P″ Q″). Die V.P. der Verbindungsgeraden zu zeichnen. (Fig. 67.)

Verbinde die geg. Punkte mit einem beliebigen dritten Punkt (R′ R″), am besten einem Punkt der H.E. und bestimme die Ebene (s O t) der drei Punkte. Dann ist die gesuchte Gerade die V.P. der Schnittgeraden dieser Ebene mit der vertikalprojizierenden Ebene der Verbindungsgeraden der geg. Punkte.

Fig. 66.

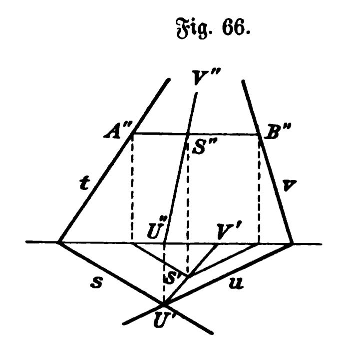
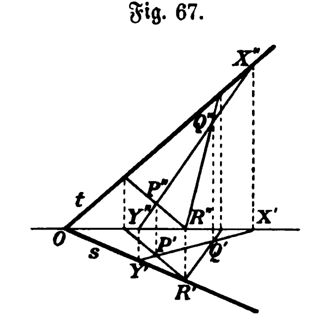


Fig. 67.



Senkrechte Lage von Gerade und Ebene.

89. Satz: Steht eine Gerade g senkrecht auf einer geg. Ebene Σ, so sind auch ihre Projektionen g′ und g″ senkrecht auf den gleichnamigen Spuren s und t der Ebene.

Beweis: Jede durch g gelegte Ebene, also auch die horizontalprojizierende Ebene Φ der Geraden g, steht senkrecht zu Σ, also

$\Phi \perp \Sigma$, zugleich aber $\Phi \perp$ H.E, daher
$\Phi \perp s$, der Schnittgeraden von Σ und H.E, somit
$g' \perp s$ und entsprechend wird bewiesen $g'' \perp t$.

Senkrechte Lage von Geraden.

Gleichnamige Projektionen senkrechter Geraden sind im allgemeinen schief zu einander; ausgenommen der Fall: Ist von zwei senkrechten Geraden mindestens eine einer Grundebene parallel, so ist die Projektion des rechten Winkels auf diese Grundebene wieder ein rechter. Beweis?

Senkrechte Lage von Ebenen.

Die Spuren senkrechter Ebenen sind im allgemeinen nicht zu einander senkrecht. Sonderfälle?

90. Beispiele:

a) Von einem geg. Punkt (P′ P″) auf eine geg. Ebene (s O t) das Lot zu fällen.

Die Lote von den Projektionen des Punkts auf die gleichnamigen Spuren der Ebene sind die Projektionen der gesuchten Geraden. Bestimme den Fußpunkt des Lots mittels der vertikalprojizierenden Ebene. (Fig. 68.)

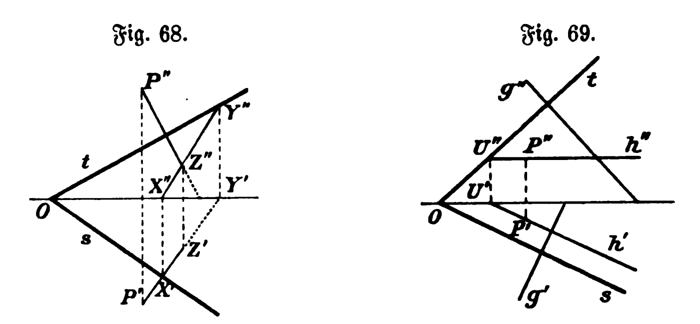


Fig. 68. Fig. 69.

b) Von einem Punkt auf eine geg. Gerade (g′ g″) die senkrechte Ebene zu fällen.

Man denke sich in der gesuchten Ebene durch den geg. Punkt eine horizontale Gerade h gezogen. Da dieselbe zur geg. Geraden senkrecht steht, so sind die Horizontalprojektionen beider Geraden senkrecht zu einander.

Fälle daher von P′ das Lot $h' \perp g'$, ziehe durch P″ die Parallele h″ zum Riß, so ist die Vertikalspur U″ der Geraden (h′ h″) ein Vertikalspurpunkt der gesuchten Ebene. Von U″ das Lot $t \perp g''$ giebt Scheitel O und O s ∥ h′. (Fig. 69.)

Bestimmung von Längen und Winkelgrößen.

91. Hauptsächlich nach zwei Verfahren:

a) Umklappung in eine Grundebene,

b) Drehung in Parallelstellung zu einer Grundebene.

Beispiele.

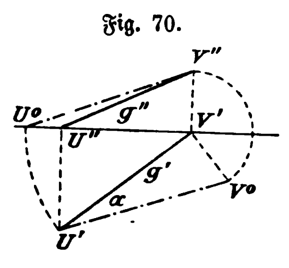
92. 1. Beispiel: Die von den Spuren U' und V'' begrenzte Strecke einer, durch ihre Projektionen (g' g'') geg. Geraden in wahrer Größe zu zeichnen und ihre Neigung α gegen die H.E. zu bestimmen. (Fig. 70.)

Lösung durch Umklappung bezw. Drehung

a) um die H.P. in die H.E.: Kreis um V' mit V' V'' bis zum Schnitt mit $V' V_0 \perp g'$ in V_0, dann ist $V_0 U'$ die gesuchte Strecke und $\sphericalangle V_0 U' V' = \sphericalangle \alpha$.

b) um das Projektionslot V' V'' in die V.E.: Kreis um V' mit V' U' bis zum Schnitt mit dem Riß in U_0, dann ist $U_0 V'' = U' V_0$ und $\sphericalangle V' U_0 V'' = \sphericalangle \alpha$.

Fig. 70.



93. 2. Beispiel: Wahre Größe und Horizontalneigung einer durch ihre Projektionen geg. Strecke X Y zu bestimmen, ohne die Strecke bis zu den Spuren zu verlängern.

1. Lösung durch Umklappung um die H.P. in die H.E.: (Fig. 71.) Sind A X'' und B Y'' die Horizontalabstände der Endpunkte der Strecke und errichtet man auf X'Y' die Lote X'X = A X'' und Y'Y = B Y'', so ist X Y die gesuchte Strecke und $\sphericalangle$ O X Y = $\sphericalangle \alpha$ für X O || X' Y'.

Fig. 71.

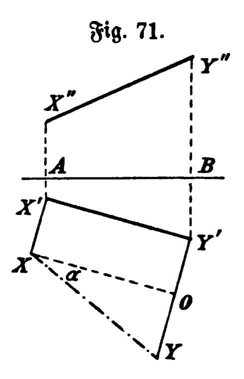
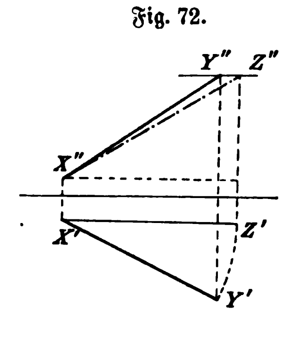


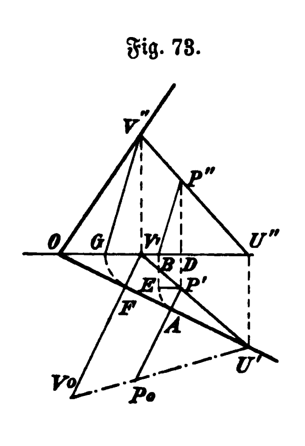
Fig. 72.



2. Lösung durch Drehung der horizontalprojizierenden Ebene um X' X in Parallelstellung zur V.E. Dabei beschreibt Y einen Kreisbogen vom Halbmesser X' Y', der sich, da seine Ebene || H.E., horizontal in wahrer Größe Y' Z', vertikal als die zum Riß parallele Y'' Z'' projiziert. X'' Z'' ist die gesuchte Strecke X Y, sie bildet mit dem Riß den gesuchten Winkel $\sphericalangle \alpha$. (Fig. 72.)

94. 3. Beispiel: Umklappung von Punkten und Geraden einer Ebene um die Horizontalspur s der letzteren in die Horizontalebene. (Fig. 73.)

Fig. 73.

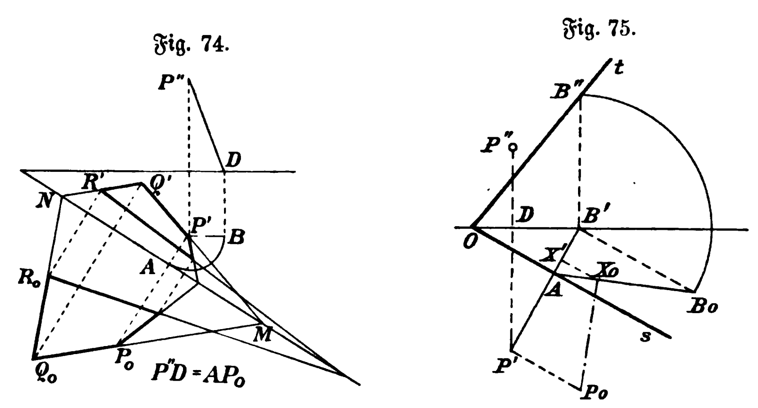


Jeder Punkt P der Ebene beschreibt bei der Drehung einen Kreis; die Ebene desselben steht senkrecht zu s und projiziert sich daher horizontal als Lot von P' auf s. Der Halbmesser dieses Kreises ist die Hypotenuse AP des rechtwinkligen Dreiecks PP'A, das als $\triangle$ P''DB aus dem Horizontalabstand P''D des Punkts P und dem Abstand P'A seiner H.P. von s als Katheten in wahrer Größe gezeichnet ist. $AP_0 = BP''$ auf P'A von A aus abgetragen giebt die gesuchte Umklappung P_0 des Punkts P.

Da die Punkte der Horizontalspur OU' als Punkte der Drehachse an der Bewegung nicht teilnehmen, so ist $U'P_0$ die Umklappung der Geraden U'P. Aus diesen Betrachtungen, vergl. auch 32), folgt allgemein:

Satz: Die Umklappung in eine Grundebene liegt parallelperspektiv zur zugehörigen Projektion.

Fig. 74. Fig. 75.



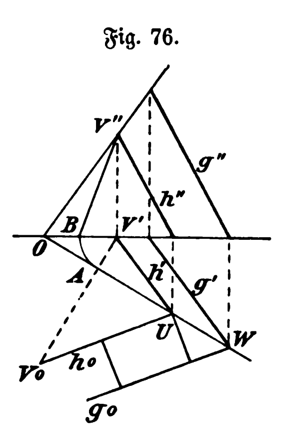
Löse mit Hilfe dieses Satzes die in Fig. 74 behandelte

Aufgabe: Geg. die H.P. eines Vielecks, die Horizontalspur MN der Ebene desselben und die V.P. einer einzigen Ecke. Das Vieleck in wahrer Größe zu zeichnen.

95. 4. Beispiel: Die Entfernung eines Punkts von einer Ebene zu bestimmen mittels Umklappung.

(Fig. 75.) Die horizontalprojizierende Ebene des gesuchten Lots steht senkrecht zur Horizontalspur s der geg. Ebene. Fälle daher P' A $\perp$ s bis zum Schnitt mit dem Riß in B', errichte auf diesem das Lot B'B'' und klappe die horizontal-

Fig. 76.

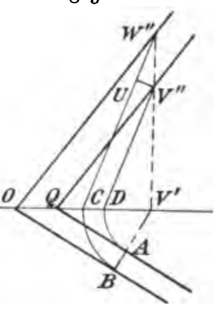


projizierende Ebene A B' B'' um ihre Horizontalspur A B' in die H.E. Errichte daher auf A B' in B' und P' die Lote $B' B_0 = B' B''$ und $P' P_0 = P'' D$, so ist $P_0 X_0 \perp A B_0$ die gesuchte Entfernung. Die H.P. des Fußpunkts X ist der Fußpunkt X' des Lots $X_0 X' \perp A B'$. X'' liegt auf der V.P. der Geraden A B''. Zeichenprobe für P'' X''?

96. 5. Beispiel: Die Entfernung zweier paralleler Geraden zu bestimmen.

(Fig. 76.) Klappe die durch ihre Projektionen $g' \parallel h'$ und $g'' \parallel h''$ geg. Parallelgeraden g und h um die Horizontalspur U W der durch sie gelegten Ebene als Achse in die H.E. in die Lage $g_0 \parallel h_0$. Es genügt, da die Horizontalspur einer Geraden zugleich ein Punkt ihrer Horizontalumklappung ist, nur eine Gerade, etwa g, umzuklappen. Das, von der Horizontalspur U der anderen Geraden auf g_0 gefällte Lot ist der gesuchte Abstand.

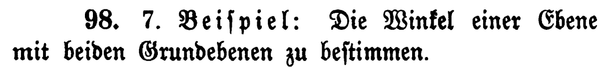
Fig. 77.




97. 6. Beispiel: Die Entfernung zweier paralleler Ebenen zu bestimmen.

(Fig. 77.) Jede zu einer Geraden der geg. Ebenen senkrechte Ebene ist auch zu den geg. Ebenen senkrecht und schneidet sie nach parallelen Geraden, die den gesuchten Abstand haben. Man wähle, als am einfachsten zu zeichnen, die zu den Horizontalspuren der geg. Ebenen senkrechte horizontalprojizierende Ebene zur Schnittebene, drehe sie mit den erzeugten Schnittgeraden um ihre Vertikalspur in die V.E., so ist der Abstand U V'' dieser Geraden der gesuchte Abstand.

Fig. 78.


98. 7. Beispiel: Die Winkel einer Ebene mit beiden Grundebenen zu bestimmen.

(Fig. 78.) Fälle, der Vereinfachung halber, von einem und demselben Punkt Q des Risses die senkrechten Ebenen (die horizontal- und die vertikalprojizierende Ebene) auf die Spuren der geg. Ebene. Sie schneiden die geg. Ebene und die Grundebenen nach zwei Dreiecken, welche die von Q aus laufende Höhe, die Schnittgerade beider projizierender Ebenen, gemein haben. Drehe die horizontalprojizierende Ebene um ihre Vertikalspur in die V.E., die vertikalprojizierende um ihre Horizontalspur in die H.E., so kommt das erste Schnitt-

dreieck in die Lage AQW, das zweite in die Lage BQU und $\sphericalangle$ QAW = $\sphericalangle$ α und $\sphericalangle$ QBU = $\sphericalangle$ β sind die gesuchten Winkel. Zur Probe: Höhe QE $\perp$ AW gleich Höhe QF $\perp$ BU.

99. 8. Beispiel: Den Winkel zweier durch ihre Projektionen geg. Geraden in wahrer Größe zu bestimmen.

Klappe beide Geraden um die Horizontalspur ihrer Ebene in die H.E.

Sind die Geraden windschief, so bringe man sie zuvor durch Parallelverschiebung zum Schnitt.

Die Umklappung des gemeinsamen Schnittpunkts beider Geraden mit deren Horizontalspuren verbunden, giebt die umgeklappten Geraden, die den gesuchten Winkel einschließen.

100. 9. Beispiel: Den Keilwinkel zweier Ebenen in wahrer Größe zu zeichnen.

Erstes Verfahren auf Grund der Begriffserklärung dieses Winkels.

Einfachstes Verfahren: Die von einem beliebigen Punkt auf beide Ebenen gefällten Lote schließen den gesuchten Keil- bezw. Nebenkeilwinkel ein, der nach dem Verfahren 99) durch Umklappung gefunden wird.

101. 10. Beispiel: Den Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene zu bestimmen.

Das von einem beliebigen Punkt der Geraden auf die Ebene gefällte Lot schließt mit der geg. Geraden einen Winkel ein, der den gesuchten zu 90° ergänzt und nach 99) gefunden wird.

102. 11. Beispiel: Die nächstgelegenen Punkte zweier windschiefer Geraden zu bestimmen.

Ebene Σ durch g parallel h. Lot PQ von einem beliebigen Punkt der h auf Σ. Parallelverschiebung von PQ längs h bis zum Schnitt mit g.

103. 12. Beispiel: Gegeben ein gerades oder senkrechtes, regelmäßiges, sechsseitiges Prisma. Grund- und Aufriß des Prismas zu zeichnen, wenn dasselbe mit einer Grundkante AB auf der H.E. so aufruht, daß seine Seitenkanten eine durch die Neigungswinkel $\alpha < 90$ und $\beta < 90$ gegen die Grundebenen gegebene Richtung k haben.

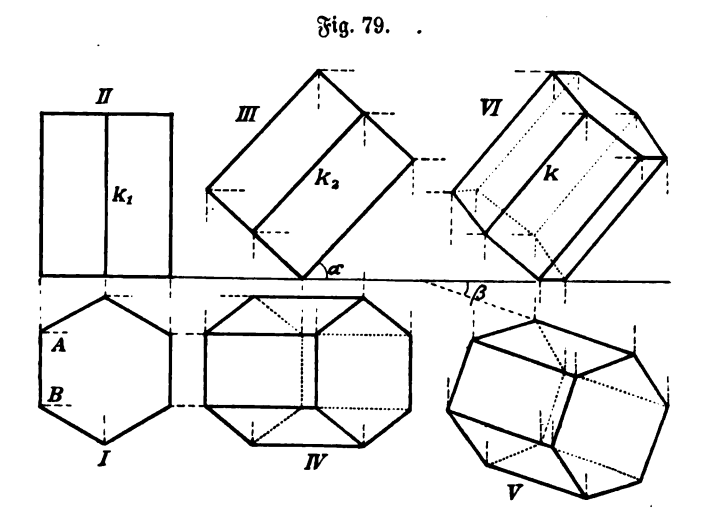
Die vorgeschriebene Richtung k der Seitenkanten denken wir uns entstanden aus einer, zu den Grundebenen parallelen bezw. senkrechten Richtung k_1 mittels zweier Drehungen. Sei $k_1 \perp$ H.E. also $\parallel$ V.E., so drehe man

a) die Gerade k_1, während sie der V.E. parallel bleibt, in eine Lage k_2 mit Neigung α gegen die H.E., jeder Punkt bewegt sich hierbei $\parallel$ V.E.;

b) die Gerade k_2, während sie die Neigung α gegen die H.E. beibehält, in die Lage k mit Neigung β gegen die V.E., hierbei bewegt sich jeder ihrer Punkte $\parallel$ H.E.

Dieselbe Bewegung erteilen wir dem ganzen, mit seiner Grundfläche auf der H.E. ruhenden Prisma. Damit bei Drehung a) jeder Punkt einen Weg || V.E. beschreibt, ist die Drehachse ⊥ V.E. zu wählen. Nehmen wir die in der H.E. verbleibende Grundkante zur Achse, zeichnen also AB ⊥ Riß, so sind die Horizontalprojektionen der bei der Drehung und Parallelverschiebung a) beschriebenen Wege — die Parallelverschiebung erfolgt nur der Uebersichtlichkeit der Figur wegen — die Parallelgeraden zum Riß durch die bezüglichen Punkte. Dieselben schneiden die von den entsprechenden Punkten des nunmehr unter α geneigten

Fig. 79.



und || V.E. verschobenen Aufrisses III $\cong$ II auf den Riß gefällten Lote in Punkten des neuen Grundrisses IV des Prismas. Durch die horizontale Drehung b) erhält der Grundriß V $\cong$ IV seine unter β gegen V.E. geneigte Lage. Die vom Grundriß V gefällten Projektionslote treffen die Parallelen zum Riß durch die entsprechenden Punkte von III, welche die Vertikalprojektionen der von diesen Punkten bei Drehung b) beschriebenen horizontalen Wege darstellen, in Punkten des Aufrisses VI. Die gesuchten Projektionen sind Grundriß V und Aufriß VI. (Fig. 79.)

104. Aufgaben zum III. Abschnitt.

Zu beweisen bezw. zu berechnen:

1. Schneidet man auf zwei windschiefen Geraden, von den Fußpunkten ihrer kürzesten Entfernung aus, vier gleiche Strecken ab, so hat die Verbindungsstrecke zweier Endpunkte dieselbe Länge und bildet mit den beiden Windschiefen dieselben Winkel wie die Verbindungsstrecke der beiden anderen.

2. Alle Punkte, welche die parallelen Strecken zwischen zwei beliebigen sich schneidenden Ebenen im gleichen Verhältnis teilen, liegen in einer Ebene durch die Schnittgerade ersterer.
3. Die Projektionen paralleler Strecken auf eine Ebene sind parallel und den Strecken proportional.
4. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so ist ihre Projektion auf eine beliebige Ebene senkrecht zur Schnittgeraden beider Ebenen.
5. Ist die Halbierungsgerade eines Winkels zu einer Ebene parallel, so halbiert ihre Projektion auch die Projektion des Winkels auf diese Ebene.
6. Die Summe der Lote von den Ecken eines Dreiecks auf eine beliebige Ebene ist dreimal so groß als das Lot vom Schwerpunkt! Erweiterung für das n-Eck.
7. Werden von einem beliebigen Punkt P lauter gleiche Strecken nach einer beliebigen Ebene gezogen, so bilden diese sämtlich mit der Ebene gleiche Winkel und ihre Endpunkte liegen auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt des von P auf die Ebene gefällten Lotes ist.
8. Jede durch die Mitte des kürzesten Abstands zweier Windschiefen zwischen sie gelegte Strecke wird in diesem Punkt halbiert.
9. Ist eine von einem Punkt nach einer Ebene gezogene Strecke doppelt so lang als das vom Punkt auf die Ebene gefällte Lot, so beträgt ihr Neigungswinkel den dritten Teil eines Rechten.
10. Jede Parallele, die man zur Schnittgeraden zweier beliebiger, durch zwei windschiefe Geraden gelegten Ebenen in der winkelhalbierenden Ebene letzterer zieht, hat von den zwei windschiefen Geraden gleiche kürzeste Entfernungen.
11. Der Schwerpunkt eines Vielecks bezw. eines von einer beliebigen Linie begrenzten ebenen Flächenstücks projiziert sich als Schwerpunkt der Projektion.
12. Die Summe der Quadrate der vier Diagonalen eines Parallelflachs ist gleich der Summe der Quadrate der zwölf Kanten.
13. Welcher Satz gilt zwischen einer Strecke und ihren Projektionen auf drei zu einander senkrechte Ebenen bezw. deren Schnittgeraden?
14. Geg. die Entfernungen a und b zweier Punkte von einer Ebene und der Abstand c der Fußpunkte ihrer Lote. Gesucht die Entfernung der Punkte und der Neigungswinkel ihrer Verbindungsstrecke gegen die Ebene.
15. Auf der Ebene eines rechtwinkligen Dreiecks sei im Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte c errichtet, deren oberer Endpunkt von den Endpunkten der Hypotenuse die Entfernungen a und b hat. Gesucht die Länge der Hypotenuse?
16. Berechne die Fläche der Projektion eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite a auf eine zu einer Seite des Dreiecks parallele und gegen die Ebene desselben unter 30° geneigte Bildebene.

17. Geg. die Seiten a, b, c eines beliebigen Dreiecks und ein Punkt im Raum so, daß je zwei der Verbindungsstrecken des Punkts und der Dreiecksecken zu einander senkrecht stehen. Berechne die Flächen der seitlichen Dreiecke.
18. Die Verbindungsgerade der Scheitel zweier rechten Winkel, deren Schenkel paarweise nach derselben Richtung parallel laufen, stehe senkrecht zu den Ebenen der Winkel und sei c = 20 cm. Auf dem einen Schenkel des einen Winkels sei vom Scheitel aus eine Strecke a = 48 cm, auf dem ihm nicht parallelen des anderen eine solche gleich b = 165 cm abgetragen. Wie lang ist die diese Endpunkte verbindende Strecke?
19. In welchem Verhältnis steht eine Fläche zu ihrer Parallelprojektion, wenn die Projektionsstrahlen mit ersterer den Winkel φ, mit letzterer den Winkel ψ bilden?

Folgende Aufgaben sind zunächst in Parallelperspektive, dann womöglich nach dem Verfahren der darstellenden Geometrie zu zeichnen:

20. Eine Ebene zu zeichnen, die von vier beliebigen Punkten im Raum gleiche Entfernungen hat. Anzahl der Lösungen?
21. In einer Ebene sind die Fußpunkte der drei Lote geg., die von den Eckpunkten eines beliebigen Dreiecks auf sie gefällt sind; außerdem kennt man die Längen dieser Lote. Das Dreieck in wahrer Größe zu zeichnen. Als Ebene der Fußpunkte wähle man am einfachsten die H.E.
22. Denjenigen Punkt zu bestimmen, der von sämtlichen Ecken zweier unter $\sphericalangle \alpha$ gegeneinander geneigter, kongruenter regelmäßiger n-Ecke, die eine Seite gemein haben, gleich weit entfernt ist. Beispiel $n = 6$, $\alpha = 120^{\circ}$.
23. Gesucht der Ort aller Punkte einer Ebene, die von einem geg. Punkt außerhalb eine geg. Entfernung s haben. Möglichkeiten?
24. In einer geg. Ebene diejenigen Punkte zu bestimmen, die von zwei beliebigen Punkten (Ebenen) gleiche Entfernungen haben.
25. Den Punkt zu bestimmen, der von den vier Seiten eines windschiefen Vierecks gleich weit entfernt ist.
26. Einen Punkt zu bestimmen, der von drei geg. Ebenen geg. Entfernungen hat.
27. Einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von vier geg. Ebenen sich wie m : n : p : q verhalten.
28. Eine Gerade zu finden, die zwei Gegenseiten eines windschiefen Vierecks im selben Verhältnis schneidet und auf einer derselben senkrecht steht.
29. Auf einer geg. Geraden einen Punkt zu bestimmen, für welchen die Summe der Entfernungen von zwei beliebigen geg. Punkten des Raumes einen kleinsten Wert hat. (Bringe die beiden durch Gerade und je einen der geg. Punkte bestimmten Ebenen durch Drehung um die Gerade zur Deckung.)
30. In einer geg. Ebene einen solchen Punkt zu finden.
31. Ort aller Punkte einer Ebene, deren Verbindungsgeraden mit zwei festen Punkten des Raumes gleiche Neigung gegen die Ebene haben?

32. In einer geg. Ebene einen Punkt zu finden, dessen Verbindungsgeraden mit drei beliebigen Punkten des Raumes gegen die Ebene gleich geneigt sind.
33. Von einem in einer Ebene liegenden Punkt nach einer zweiten zu dieser senkrechten Ebene eine Gerade zu ziehen, die mit beiden Ebenen gleiche Winkel bildet. Möglichkeiten?
34. Eine Gerade zu finden, die einer geg. Geraden parallel ist und von zwei anderen geg. Geraden gleiche kürzeste Entfernungen hat.
35. In einer geg. Ebene eine Gerade zu ziehen, die von zwei beliebigen geg. Punkten des Raumes geg. Abstände hat. Möglichkeiten?
36. Durch einen geg. Punkt eine Ebene zu legen, die parallel einer geg. Geraden ist und von ihr einen geg. Abstand hat.
37. Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, die von zwei geg. Geraden geg. kürzeste Entfernungen hat.
38. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die mit einer anderen geg. Geraden einen geg. Winkel bildet. (Bringe die geg. Geraden zum Schnitt.)
39. Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, die gegen eine geg. Ebene eine geg. Neigung hat und einer zweiten geg. Ebene parallel ist.
40. Zwischen eine geg. Gerade und eine geg. Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie einer geg. Ebene parallel ist und mit der geg. Geraden einen geg. Winkel bildet.
41. Geg. zwei Punkte und eine Gerade. Auf der Geraden einen dritten Punkt zu finden, so daß das durch die drei Punkte bestimmte Dreieck einen geg. Flächeninhalt hat.
42. In wahrer Größe die Projektion eines Quadrats von der Seite **a** zu zeichnen, wenn die Ebene desselben mit der Projektionsebene einen geg. Winkel α bildet, eine Ecke des Quadrats in der Schnittgeraden beider Ebenen liegt und eine Seite des Quadrats gegen diese Schnittgerade unter $\sphericalangle \beta$ geneigt ist.
43. Zwischen zwei geg. windschiefe Geraden eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß ihre Projektion auf eine geg. Ebene eine geg. Länge hat. (Zeichne zuerst die zwischen den Parallelebenen der Windschiefen parallel verschobene Strecke durch den Spurpunkt der einen Windschiefen mit der geg. Ebene.)
44. Ein Quadrat von der Seite **a** mit zwei Gegenecken so auf zwei geg. Windschiefe aufruhend zu legen, daß es sich auf eine geg. Ebene als Rhombus von geg. Fläche projiziert.
45. Grund und Aufriß eines Würfels von der Kante **a** zu zeichnen, der mit einer Seitenfläche (Kante, Ecke) auf der H.E. aufruht.
46. Desgleichen ein Tetraeder, d. h. eine dreiseitige Pyramide mit lauter gleichen Kanten.
47. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die mit zwei anderen geg. Geraden gleiche Winkel bildet.

48. In einer von zwei geg. Windschiefen einen Punkt X zu finden, der von der anderen einen geg. Abstand hat.
49. Welche Ebenen durch einen geg. Punkt bilden mit zwei bezw. drei geg. Ebenen gleiche Winkel.
50. Zwischen zwei geg. Ebenen eine Strecke von geg. Länge so durch einen geg. Punkt des Raumes zu ziehen, daß sie in diesem Punkt halbiert bezw. in einem bestimmten Verhältnis geteilt wird. Möglichkeiten?
51. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die mit zwei geg. Ebenen gleiche Winkel bildet.
52. Durch einen geg. Punkt eine Ebene zu legen, die mit drei geg. Ebenen gleiche Winkel bildet.

IV. Abschnitt.

Krystallographie.

Einleitung.

105. Ihrer äußeren Gestalt nach sind die starren, anorganischen Naturkörper, die Mineralien, entweder amorph (gestaltlos), d. h. sie besitzen keine bestimmte gesetzmäßige Gestalt, oder sie sind allseitig von Ebenen umgrenzt, die nach einer ursprünglichen (nicht künstlich erzeugten), für die chemische Zusammensetzung des Minerals wesentlichen Gesetzmäßigkeit angeordnet sind: sie sind krystallisiert.

Achsen und Parameter.

106. Um die Gestalt eines Krystalls zu beschreiben, d. h. um die gegenseitige Lage seiner Ebenen möglichst einfach mathematisch auszudrücken, denkt man sich, da jede Ebene durch drei Punkte bestimmt ist, durch einen Punkt im Innern des Krystalls drei ideale Geraden gelegt, die sogen. Achsen. Durch die Angabe der drei Parameter, d. h. der vom Mittelpunkt (Schnittpunkt) des Achsenkreuzes ausgemessenen Strecken, die von jeder Ebene des Krystalls auf den Achsen abgeschnitten werden, ist die Lage jeder dieser Ebenen eindeutig bestimmt, vgl. 82). Die Achsen können so gewählt werden, daß die Ebenen des Krystalls sich symmetrisch um sie herum anordnen. Eine gewisse Anzahl Krystalle besitzt sogar vier derartige Achsen.

Die beiden Krystallgesetze.

107. Die Vergleichung mehrerer Krystalle eines und desselben Minerals zeigt, daß nur in den Kantenwinkeln Uebereinstimmung stattfindet, daß somit einer und derselben chemischen Verbindung, wenn sie krystallisiert, unveränderliche Kantenwinkel zugehören; daher

1. Gesetz: Jede Krystallfläche kann parallel verschoben gedacht werden, ohne der Art der Krystallform Eintrag zu thun. (Gesetz der Winkelkonstanz oder der ungleichen Zentraldistanz.)

Daraus folgt, daß zur Lagenbestimmung einer Krystallfläche die Angabe des Verhältnisses ihrer Parameter vollauf genügt.

Diejenige Ebene, welche die drei Achsen nach den drei Einheiten a, b, c schneidet, hat das „Zeichen" oder den Achsenausdruck a : b : c.

Irgend eine andere Krystallfläche hat dann das Zeichen

$$\lambda a : \mu b : \nu c = a : mb : nc,$$

$$\text{wenn } \frac{\mu}{\lambda} = m \text{ und } \frac{\nu}{\lambda} = n \text{ gesetzt wird.}$$

Die genauesten Bestimmungen der Parameterverhältnisse sämtlicher bekannten Krystalle ergaben das

2. Gesetz: Alle Krystallflächen schneiden die Achsen nach meist einfachen und stets rationalen Verhältnissen,

d. h. m und n sind entweder ganze Zahlen, im allgemeinen zwischen den Grenzen 1 bis 6 oder die aus ihnen gebildeten Brüche wie etwa $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$ u. s. f., niemals dagegen Wurzelgrößen, so daß, mit Ausnahme des Sechsecks, vom Fünfeck einschließlich an, sämtliche regelmäßigen Vielecke von der Umgrenzung der Krystalle ausgeschlossen sind.

Art der Krystallflächen.

108. Nach den Parameterverhältnissen bezeichnet man die Krystallflächen als

1. Pyramidenflächen: sie schneiden alle drei Achsen, daher ihr Zeichen

$$a : nb : mc$$

2. Prismenflächen: sie sind einer Achse parallel, etwa || a-Achse, daher das Zeichen

$$\infty a : nb : mc = \frac{\infty}{n} a : b : \frac{m}{n} c = \infty a : b : m'c$$

$$= \frac{\infty}{m} a : \frac{n}{m} b : c = \infty a : n'b : c$$

3. Endflächen: sie sind zwei Achsen parallel, etwa || b-Achse und || c-Achse, daher das Zeichen

$$a : \infty b : \infty c = o\,a : b : c, \text{ da } \frac{1}{\infty} = o \text{ und } \frac{\infty}{\infty} = 1$$

Die Krystallsysteme.

109. Achsen, die gegeneinander gleich geneigt sind und von sämtlichen Krystallflächen nach demselben Parameterverhältnis geschnitten werden, heißen gleichwertig.

Nach Anzahl, Stellung und Wertigkeit der Achsen lassen sich sämtliche bekannten Krystalle in folgende sieben Systeme einreihen:

A. Dreiachsige Krystalle.

a) Drei sich gegenseitig halbierende, zu einander senkrechte Achsen $a \perp b \perp c$. Wähle Ebene (ab) horizontal, die c-Achse vertikal. Fig. 80.

α) alle Achsen gleichwertig:

$a = b = c$ ... Reguläres System.

β) Zwei Achsen gleichwertig:

$a = b$ ... Quadratisches System.

γ) Alle Achsen ungleichwertig:

... Rhombisches System.

b) Drei sich gegenseitig halbierende Achsen, davon zwei zu einander senkrecht, die dritte dagegen nur noch zu einer der ersteren senkrecht, zur anderen schief, also $b \perp c$ und $b \perp a$, nicht mehr $c \perp a$:

Monoklines System.

c) Drei sich gegenseitig halbierende Achsen, davon zwei zu einander senkrecht, etwa $b \perp c$, die dritte gegen beide geneigt:

Diklines System.

d) Drei sich gegenseitig halbierende Achsen, sämtlich schief zu einander:

Triklines System.

B. Vierachsige Krystalle.

Drei gleichwertige Achsen in einer Ebene (horizontal), sich gegenseitig halbierend, unter 60°, die vierte ungleichwertige im Schnittpunkt ersterer auf deren Ebene senkrecht (Fig. 101):

Hexagonales System.

110. Für das Verständnis der Krystallformen ist es ratsam, sich letztere selbst aus dünnem Pappdeckel anzufertigen. Hierzu ist die Zeichnung des Netzes erforderlich, wie dies im folgenden bei einigen Krystallen angedeutet ist. Unter dem Netz versteht man die, in fortlaufendem Zug in eine Ebene ausgebreitete Oberfläche eines Krystalls, die man sich nach möglichst wenig Kanten aufgeschnitten zu denken hat.

Reguläres System.

111. Zeichnung in Parallelperspektive mit Neigung 60° und Verkürzung auf $\frac{1}{3}$: Als Zeichnungsebene wähle man am günstigsten die Ebene der Vertikalachse Z und der Querachse Y; zeichne also $OC \perp OB$ und $OC = z = a$ und $OB = y = a$, dann erscheint die gleichgroße, weil gleichwertige, dritte Achse, die Längsachse $x = OA$, die in Wirklichkeit zu den beiden ersten senkrecht steht, gegen die Querachse unter $\sphericalangle AOB' = 60°$ geneigt und auf $\frac{1}{3}$ a verkürzt. Fig. 80.

Quenstedt[1]) kennzeichnet die Gleichwertigkeit der Achsen mit den Worten: „Was der einen Achse recht ist, ist der anderen billig." Da sonach jede der drei Achsen mit gleichem Recht als X- oder Y- oder Z-Achse betrachtet werden kann, so ersetzt das Zeichen a : na : ma in allgemeinster Weise die sechs gleichwertigen Flächen

x : ny : mz	nx : y : mz	nx : my : z
x : my : nz	mx : y : nz	mx : ny : z

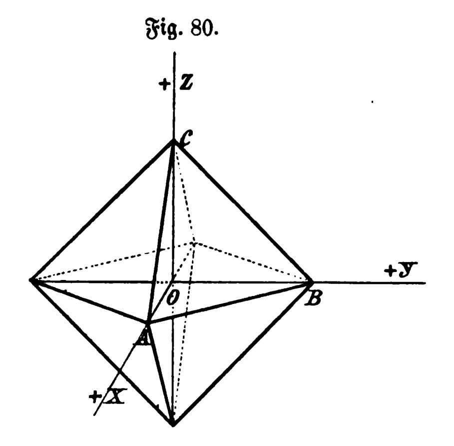
eines jeden der acht Oktanten, in welche der Raum durch die Ebenen der drei Achsen geteilt wird.

a : na : ma ist somit das Zeichen für sämtliche Krystallflächen, d. h. das Zeichen des Krystalls selbst.

Die sieben regulären Krystalle.

112. Giebt man den Parametern n und m alle möglichen Werte, so erhält man folgende regulären Krystallformen:

Fig. 80.



Es sei m = n und zwar

1. m = n = 1 giebt a : a : a

das Oktaeder O, in jedem Oktanten nur eine Ebene, daher umgrenzt von 8 Flächen, die zu je 4 in einer Ecke zusammenstoßen; besitzt daher 6 vierflächige, gleichkantige Ecken mit im ganzen 12 gleichen Kanten — unter Kanten sind jedoch keine Strecken, sondern die Kantenwinkel zu verstehen — und hat somit die Gestalt einer von zwei regelmäßigen vierseitigen senkrechten Pyramiden mit gemeinschaftlicher Grundfläche gebildeten Doppelpyramide. Alaun, Diamant, Magneteisenerz. Fig. 80.

[1]) Quenstedt, Prof. der Mineralogie und Geologie in Tübingen 1837—1889.

2. $m = n < 1$, etwa $\frac{1}{2}$, giebt $a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{2} a = 2a : a : a$
oder

$$a : a : 2a$$

Triakis- oder Pyramidenoktaeder 2O, da der Krystall den Eindruck eines Oktaeders macht, auf dessen Flächen, von den Kanten aus, dreiseitige Pyramiden aufgesetzt sind. Es besitzt 8 dreiflächige gleichkantige Ecken in den Mitten der Oktanten, sogen. Würfelecken, und 6 achtflächige Ecken mit abwechselnd gleichen Kanten, die sogen. Oktaederecken an den Enden der Achsen. Sind sämtliche Flächen gleich groß

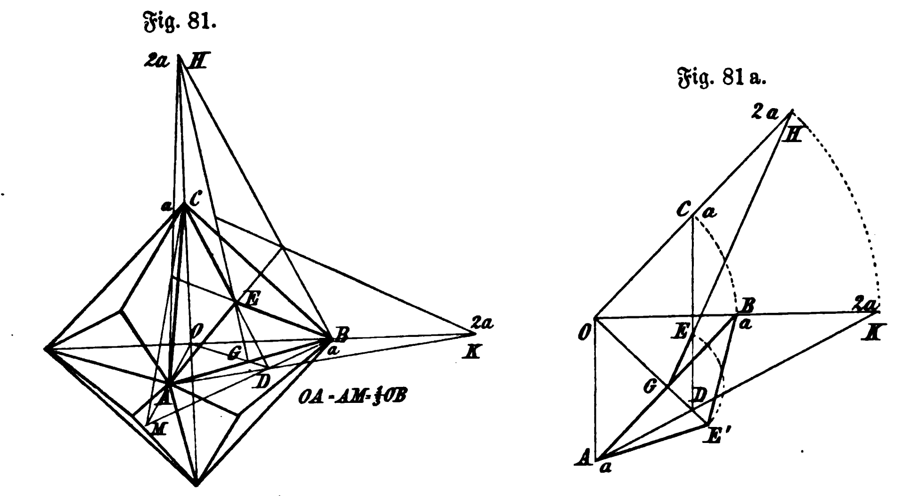


Fig. 81. Fig. 81 a.

entwickelt oder, wie man sagt, „im Gleichgewicht", so besteht die Umgrenzung aus 8 . 3 kongruenten stumpfwinklig gleichschenkligen Dreiecken. Diamant, Flußspat, Bleiglanz. Fig. 81. Mittels Umklappung der Ebene (COD) um OD in (AOB) erhält man die Höhe GE bezw. den Schenkel CE des Netzdreiecks. Fig. 81 a.

Alle anderen echten Brüche für $m = n$ liefern ebenfalls Pyramidenoktaeder, nur mit anderen Kanten, z. B. geben $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{3}$ die Pyramidenoktaeder

$$a : a : 4a \quad \text{und} \quad a : a : \frac{3}{2} a$$

3. $m = n = o$ giebt $a : oa : oa = \infty a : a : a$
oder

$$a : a : \infty a$$

Rhombendodekaeder oder Granatoeder ∞O, mit 8 dreiflächigen Würfel- und 6 vierflächigen Oktaederecken mit im ganzen 24 gleichen Kanten. Besteht Gleichgewicht, so bilden 12 kongruente Rhomben die

Umgrenzung. Granat, Blende. Fig. 82. Fig. 82a zeigt die Umklappung der Ebene (COD). Die Diagonalen der Rhombenseitenflächen sind $AB = \sqrt{2} . a$ und $2 EG = a$.

Fig. 82.

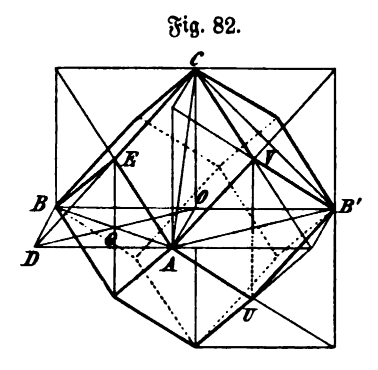
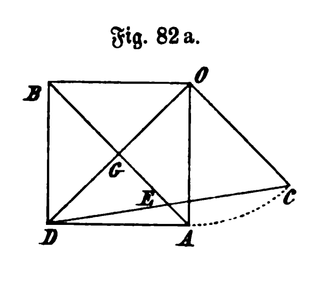


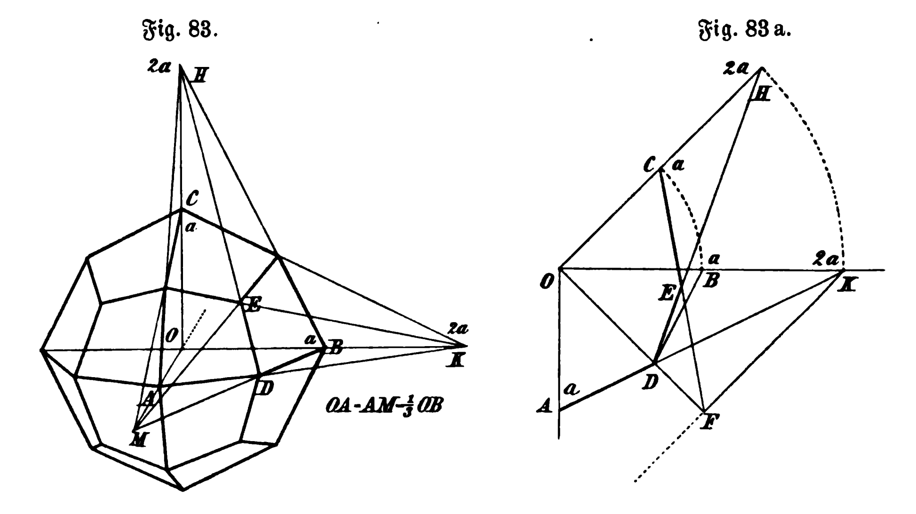
Fig. 82a.



4. $m = n > 1$, etwa 2, giebt $a : 2a : 2a$

Ikositetraeder 2O2, mit 8 dreiflächigen gleichkantigen Würfelecken in den Mitten der Oktanten, 6 vierflächigen gleichkantigen Oktaederecken an den Enden der Achsen und 12 vierflächigen sogen. Zwischenecken, jede mit

Fig. 83. Fig. 83a.



abwechselnd gleichen Kanten, an den Enden der Zwischenachsen, d. h. derjenigen Geraden, welche die Winkel der Hauptachsen halbieren; bei Gleichgewicht umgrenzt von 24 kongruenten Deltoiden, das sind Vierecke, welche eine Diagonale zur Symmetrieachse haben. Analcim, Granat. Fig. 83. Umklappung der Ebene (COD); das Netzdeltoid bestimmt durch AD, DE, CE. Fig. 83a. Für

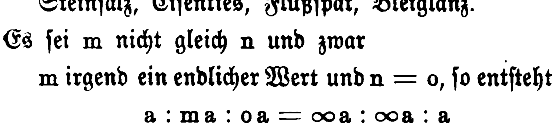
$$m = n = 1\frac{1}{2}, \; 3 \text{ u. s. f.}$$

entstehen Ikositetraeder mit anderen Kanten.

5. $m = n = \infty$ giebt $a : \infty a : \infty a$

Würfel oder Hexaeder $\infty O \infty$, mit 8 dreiflächigen rechtwinkligen Ecken mit im ganzen 12 gleichen Kanten; bei Gleichgewicht umgrenzt von 6 kongruenten Quadraten, anderenfalls von drei Paaren paralleler kongruenter Rechtecke. Was stereometrisch als Quader bezeichnet wird, ist krystallographisch ein Würfel, vgl. 107), Gesetz 1. Fig. 84. Steinsalz, Eisenkies, Flußspat, Bleiglanz.

Fig. 84.



Es sei m nicht gleich n und zwar

m irgend ein endlicher Wert und $n = o$, so entsteht

$$a : ma : oa = \infty a : \infty a : a$$

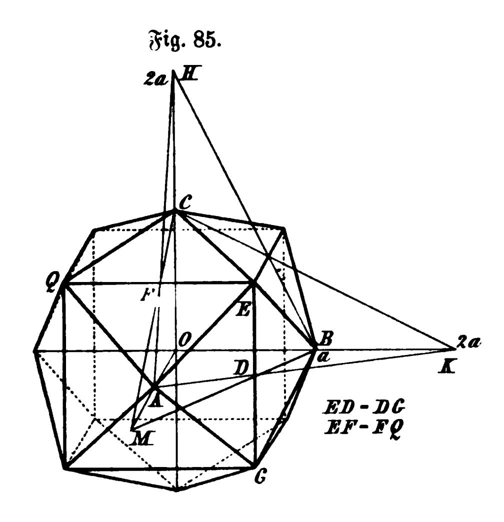
d. h. wieder der Würfel.

6. m irgend ein endlicher Wert und $n = \infty$ giebt

$$a : ma : \infty a$$

Tetrakishexaeder oder Pyramidenwürfel $\infty O m$, da der Krystall den Eindruck eines Würfels macht, auf dessen Flächen, von den Kanten aus, senkrechte vierseitige Pyramiden aufgesetzt sind. 6 vierflächige gleich-

Fig. 85.



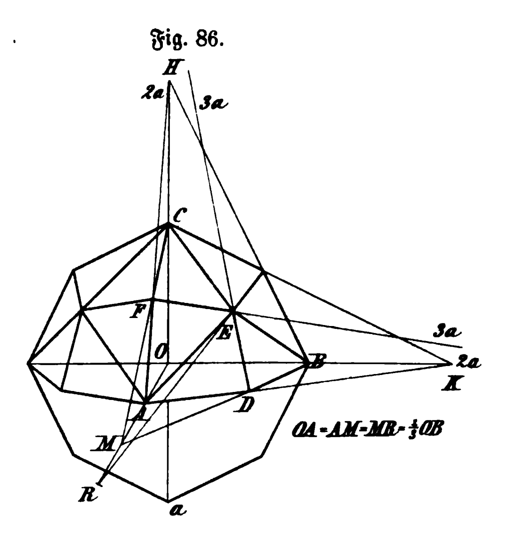
kantige Oktaederecken an den Enden der Achsen, 8 sechsflächige Würfelecken mit abwechselnd gleichen Kanten. Bei Gleichgewicht umgrenzt von 4 . 6 gleichschenkligen Dreiecken. Flußspat. Fig. 85.

7. m sowohl als n irgend ein endlicher Wert

a : ma : na

Hexakisoktaeder oder Achtundvierzigflächner mOn, mit 8 sechsflächigen Würfel-, 6 achtflächigen Oktaeder- und 12 vierflächigen Zwischen-

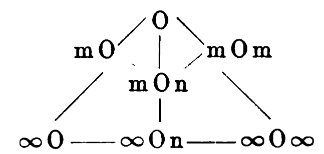
Fig. 86.



ecken, jede dieser Ecken mit abwechselnd gleichen Kanten. Bei Gleichgewicht umgrenzt von 8 . 6 kongruenten ungleichseitigen Dreiecken. Diamant. Fig. 86 für m = 2 und n = 3 das häufigste Hexakisoktaeder 203.

113. Im vorhergehenden wurden die beiden häufigst gebrauchten Krystallbezeichnungen, die Weißsche und Naumannsche, verwendet; erstere nach Parameterverhältnissen, die beste, von dem Begründer der Krystallographie Weiß, einem Schüler des Reformators der Mineralogie und Schöpfers der Geognosie Gottlob Abraham Werner, Prof. in Freiberg i. S., † 1817, letztere von Prof. Naumann in Leipzig, ausgezeichnet durch einfachere Schreibweise und Uebersichtlichkeit.

Zusammenstellung der reg. Krystallformen nach Naumann:



Die Halbflächner des regulären Systems.

114. Außer in den im vorhergehenden besprochenen Krystallformen, den sogen. Vollflächnern oder Holoedern, krystallisieren viele reguläre Mineralien in Formen, die als Halbflächner oder Hemieder bezeichnet werden, da bei ihnen

nur die eine Hälfte der Flächen der Holoeder ausgebildet ist, die andere dagegen überwachsen wird. Ihre Bildung erfolgt nach drei Gesetzen:

a) Die Flächen abwechselnder Oktanten wachsen: Geneigt- oder schiefflächige Hemiedrie, auch tetraedrische Hemiedrie genannt.
b) Abwechselnde Flächen wachsen, wobei sich gleichverhaltende Flächen in Nebenoktanten aneinander stoßen: Parallelflächige Hemiedrie.
c) Abwechselnde Flächen wachsen, wobei sich nicht gleich verhaltende Flächen in Nebenoktanten aneinander stoßen: Gyroedrische Hemiedrie. In dieser Hemiedrie krystallisieren nur sehr wenig Mineralien, z. B. Salmiak, daher mögen nur die beiden ersten Hemiedrien behandelt werden.

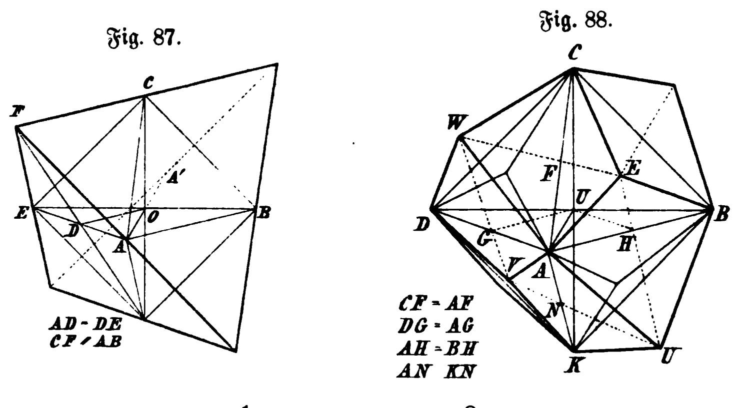
Da mit gleichem Recht jede der beiden Flächenhälften eines Vollflächners als die wachsende betrachtet werden kann, so entstehen aus jedem Vollflächner zwei Halbflächner, die sich nur durch ihre gedrehte Stellung unterscheiden und mit $\pm$ bezeichnet werden mögen.

Geneigtflächige Hemiedrie.

115. Diejenigen Vollflächner, die von Flächen umgrenzt sind, welche sich in zwei und mehr Nebenoktanten erstrecken — erkenntlich am Parameter ∞ — geben, da alsdann mit dem einen Oktanten zugleich der Nebenoktant wächst, Hemieder, die sich von dem Holoeder nicht unterscheiden. Dies ist der Fall bei ∞ O, ∞ On, ∞ O ∞. Man erhält somit nur vier neue Körper:

1. $$\frac{1}{2}(a : a : a) = \frac{O}{2},$$

das Tetraeder, Halbflächner des Oktaeders, mit 4 dreiflächigen gleichkantigen Ecken und 6 gleichen Kanten, umgrenzt von 4 gleichseitigen Dreiecken. Fahlerz. Borazit. Fig. 87.



2. $$\frac{1}{2}(a : a : m a) = \frac{m O}{2},$$

das Deltoiddodekaeder, Halbflächner des Pyramidenoktaeders, mit 8 dreiflächigen, gleichkantigen, abwechselnd gleichen und 6 vierflächigen

ungleichkantigen Ecken; bei Gleichgewicht umgrenzt von 12 Deltoiden. Fahlerz. Fig. 88.

3. $$\frac{1}{2}(a:ma:ma) = \frac{mOm}{2},$$

das Trigondodekaeder oder Pyramidentetraeder, Halbflächner des Ikositetraeders, 4 dreiflächig gleichkantige und 4 sechsflächig ungleichkantige Ecken. Bei Gleichgewicht umgrenzt von 12 gleichschenkligen Dreiecken, so daß auf den Flächen eines Tetraeders senkrechte dreiseitige Pyramiden aufgesetzt erscheinen. Fahlerz. Fig. 89.

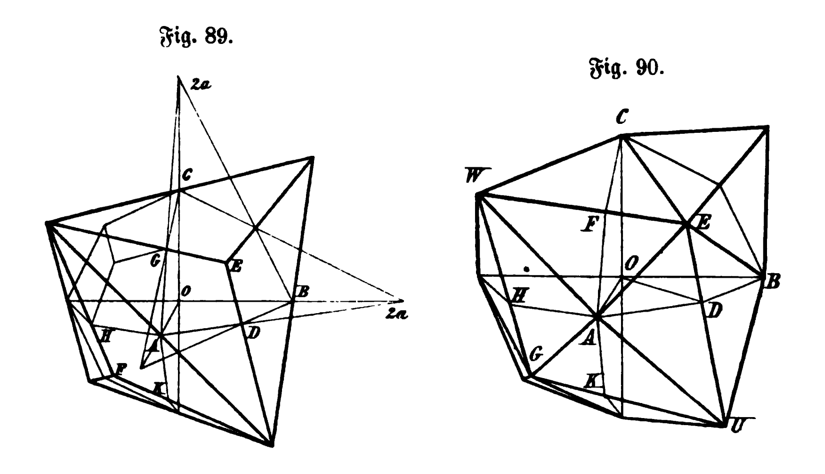


Fig. 89. Fig. 90.

4. $$\frac{1}{2}(a:ma:na) = \frac{mOn}{2},$$

das Hexakistetraeder, Halbflächner des Hexakisoktaeder, umgrenzt von 24 ungleichseitigen Dreiecken, 14 (dreierlei) Ecken und 36 Kanten. Fahlerz. Borazit. Fig. 90.

Parallelflächige Hemiedrie.

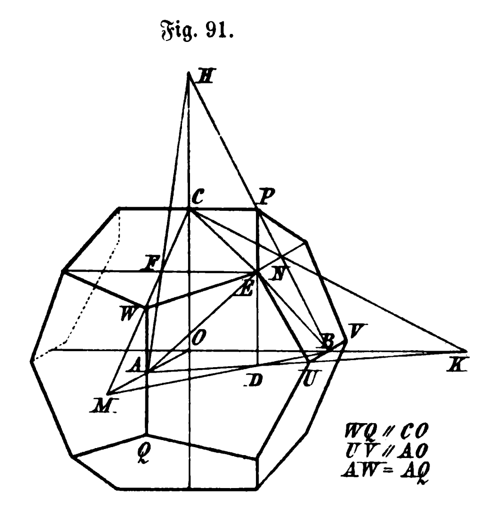
116. Während an den geneigtflächigen Halbflächnern, wie der Name sagt, keine parallelen Flächen auftreten, sind die Körper der parallelflächigen Hemiedrie von lauter parallelen Flächenpaaren umgrenzt, wie die Vollflächner. Hier können notwendig nur bei denjenigen Vollflächnern Halbflächner entstehen, die in jedem Oktanten 6 nicht teilweise zusammenfallende Flächen besitzen — erkenntlich daran, daß die Parameter m und n verschieden sind —, denn betrachtet man z. B. das Pyramidenoktaeder, so stellt jedes der 3 gleichschenkligen Dreiecke eines Oktanten

zwei, in eine Ebene gefallene Dreiecksflächen vor: man hat nur von der Würfelecke die Transversale nach der Mitte der Oktaederkante zu ziehen. Wachsen somit die abwechselnden Hälften der 3 gleichschenkligen Dreiecke, so wächst der ganze Oktant und damit auch der Nebenoktant, da wachsende Flächen in Nebenoktanten aneinander stoßen, d. h. alle Oktanten wachsen oder der Halbflächner unterscheidet sich nicht von seinem Vollflächner. Man erhält somit nur zwei neue Körper:

1. $$\frac{1}{2}[a : ma : \infty a] = \left[\frac{\infty O m}{2}\right],$$

das Pentagondodekaeder oder Pyritoeder, Halbflächner des Pyramidenwürfels, bei Gleichgewicht umgrenzt von 12 symmetrischen, nicht regelmäßigen Fünfecken. Die Symmetriegeraden sind die Schnittgeraden der Fünfecksflächen mit den Hauptachsenebenen. Durch ihre größte

Fig. 91.

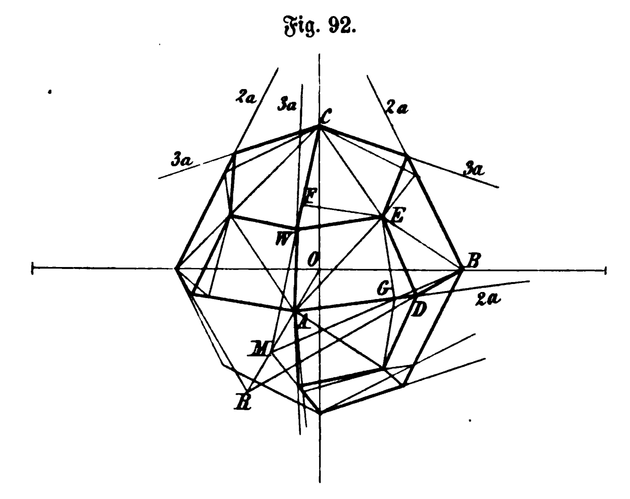


Länge ausgezeichnet sind die in letzteren liegenden drei Paare den Achsen paralleler Kanten, sogen. Gipfelkanten, die durch je zwei Paare einer und derselben Achse paralleler Fünfecksflächen erzeugt werden. Eisenkies. Kobaltglanz. Fig. 91.

2. $$\frac{1}{2}[a : ma : na] = \left[\frac{m O n}{2}\right],$$

das Diploeder oder Dyakisdodekaeder, auch gebrochenes Pentagondodekaeder — da die symmetrischen Fünfecke des Pentagondodekaeders nach ihrer Symmetriegeraden gewissermassen gebrochen er-

Fig. 92.



scheinen — ist der von 24 Trapezoiden umgrenzte Halbflächner des Achtundvierzigflächners. Pyrit. Fig. 92.

Tetartoedrie.

117. Endlich kennt man noch reguläre Krystalle, bei denen nur der vierte Teil der Holoederflächen ausgebildet ist, z. B. bei Barymnitrat. Diese Viertelsflächner oder Tetartoeder werden erhalten, indem man die Vollflächner zweien der in 114) aufgeführten Hemiedrien a, b, c unterwirft.

118. Kombinationen.

Vielfach sind die Krystalle keine einheitlichen Formen. Die umgrenzenden Flächen gehören dann mehreren der oben beschriebenen Krystallformen an: der Krystall ist eine Kombination. Die an ihm vorherrschenden, d. h. am stärksten ausgeprägten Flächen bilden seine Grundform (Habitus). Sie wird den anderen, weniger mächtig entwickelten Krystallformen vorangeschrieben. Zu untersuchen ist, wie letztere an der Grundform auftreten:

Denkt man sich sämtliche regulären Krystallformen um ein und dasselbe System der drei a-Achsen herum angeordnet, so sind die, innerhalb der Grundform liegenden Flächen der anderen Formen vom Achsenkreuzmittelpunkt weg, die außerhalb liegenden in der Richtung auf jenen Mittelpunkt zu, sich selbst parallel, an den Rand der Grundform zu verschieben, wo sie entweder Ecken oder Kanten abstumpfen bezw. zuschärfen.

119. Beispiele.

$\infty O \infty . O$ Grundform ein Würfel, dessen 8 Ecken durch die 8 Oktaederflächen gleichmäßig abgestumpft werden. Statt der Würfelecken beobachtet man gleichseitige Dreiecke. Flußspat. Fig. 93 a.

O . ∞O∞ Oktaeder, dessen 6 Ecken durch die 6 Würfelflächen gleichmäßig abgestumpft werden. An Stelle der Oktaederecken erscheinen Quadrate bezw. Rechtecke. Bleiglanz. Fig. 93 b.

Sind Oktaeder und Würfel gleich stark entwickelt — „im Gleichgewicht“ — so entsteht

∞O∞ . O = O . ∞O∞ das Haüysche Kubooktaeder, umgrenzt von 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken. Eisenkies. Fig. 93 c.

Fig. 93 a.

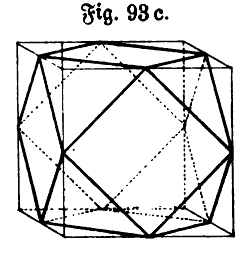


Fig. 93 c.

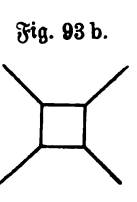


Fig. 93 b.

O . ∞O Oktaeder, dessen 12 Kanten von den 12 Flächen des Granatoeders gleichmäßig abgestumpft werden. Die neuen Ecken zeigt Fig. 93 d.

∞O . O Granatoeder, dessen Würfelecken vom Oktaeder gleichmäßig abgestumpft werden, so daß gleichseitige Dreiecke dafür auftreten.

∞O∞ . ∞O Würfel mit gleichmäßig abgestumpften Kanten. Die neu entstehenden Ecken zeigt Fig. 93 e.

∞O∞ . ∞O . O Würfel mit gleichmäßig abgestumpften Kanten und Ecken. Was für Vielecke treten an Stelle der ursprünglichen Würfelecken? Fig. 93 f.

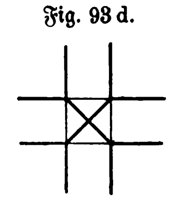


Fig. 93 d.

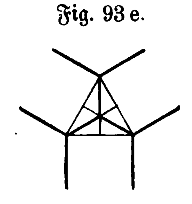


Fig. 93 e.

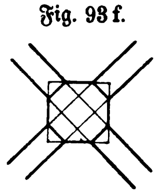


Fig. 93 f.

∞O∞ . mO Würfel, dessen Ecken von den Kanten aus dreiflächig zugeschärft werden. Fig. 93 g.

∞O∞ . mOm Würfel, dessen Ecken von den Flächen aus dreiflächig zugeschärft werden. Fig. 93 h.

O . mOm Oktaeder, dessen Ecken von den Flächen aus vierflächig zugeschärft werden.

∞O . mOm Granatoeder, dessen Kanten von den Flächen des Ikositetraeders gleichmäßig abgestumpft werden.

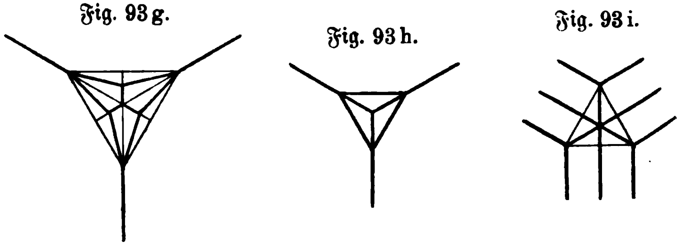
∞O∞ . ∞On Würfel, dessen Kanten von den Flächen aus zweiflächig zugeschärft werden. Fig. 93 i.

$2O . 3O$ Pyramidenoktaeder, dessen Oktaederkanten zweiflächig zugeschärft werden.

$3O . 2O$ Pyramidenoktaeder, dessen Würfelecken von den Flächen aus dreiflächig zugeschärft werden, so daß eine kleine dreiseitige Pyramide aufgesetzt erscheint.

$+\frac{O}{2} . -\frac{O}{2}$ Tetraeder, dessen Ecken vom zweiten Tetraeder gleichmäßig abgestumpft sind. An Stelle der Ecken erscheinen gleichseitige Dreiecke. Sind beide Tetraeder im Gleichgewicht, so entsteht das Oktaeder. Fahlerz.

$\frac{O}{2} . \infty O \infty$ Tetraeder, dessen Kanten vom Würfel gleichmäßig abgestumpft sind. Skizziere die neuen Ecken.


Fig. 93g. Fig. 93h. Fig. 93i.

$\left[\frac{\infty O n}{2}\right] . \infty O \infty$ Pentagondodekaeder, dessen 6 längere Kanten von den Würfelflächen gleichmäßig weggeschnitten werden. Eisenkies.

$\left[\frac{\infty O n}{2}\right] . O = O . \left[\frac{\infty O n}{2}\right]$ Pentagondodekaeder und Oktaeder im Gleichgewicht, umgrenzt von 12 gleichschenkligen, den Pentagondodekaederflächen angehörigen, und 8 gleichseitigen, den Oktaederflächen angehörigen Dreiecken. Kobaltglanz u. s. f. Vgl. das Ikosaeder 160) und 178).

Quadratisches System.

120. Parallelperspektive Zeichnung des Achsenkreuzes.

Fig. 94: Die Ebene der zwei gleichen a-Achsen sei die H.E., die ungleichwertige c-Achse sei die Vertikalachse $OC \lessgtr OB$,

$$OB \perp OC, \sphericalangle AOB' = 60^\circ, OA = \frac{1}{3} OB$$

Die quadratischen Krystallformen.

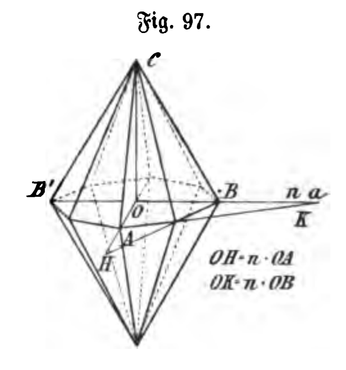
121. Die Flächen des allgemeinsten Körpers gehen von

$$a : na : mc = mPn$$

nach Naumann, bei welcher Schreibweise sich der Parameter vor P stets auf die c-Achse, derjenige nach P auf die a-Achsen bezieht: eine Doppelpyramide,

die ihrer Symmetrie wegen krystallographisch kurz als Pyramide bezeichnet wird, über einem in der H.E. liegenden symmetrischen, gleichseitigen, aber nicht regelmäßigen Achteck, welchen endlichen Wert $n \lessgtr 1$ auch haben möge, mit 8 gleichen Grund- und 8 abwechselnd gleichen Polkanten, daher auch (4 + 4)-kantige oder ditetragonale Pyramide, spitzer oder stumpfer, je nachdem $m \gtrless 1$. Fig. 97.

Fig. 97.



Giebt man m und n alle möglichen Werte zwischen o und ∞, so erhält man sämtliche Krystallformen des quadratischen Systems.

1. $n = 1$, $m \gtreqless 1$ giebt $a : a : mc = mP$

quadratische Pyramide erster Art, eine über dem Quadrat A B A' B' stehende spitzere oder stumpfere senkrechte Doppelpyramide, bei Gleich-

Fig. 94.

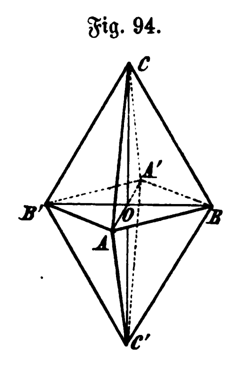
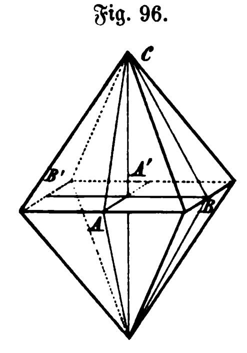


Fig. 96.



gewicht umgrenzt von 8 gleichschenkeligen kongruenten Dreiecken, 4 gleiche Grund- und 8 gleiche Polkanten. Fig. 94.

2. $n = 1$, $m = \infty$ giebt $a : a : \infty c = \infty P$

quadratische Säule erster Art, eine nach der c-Achse offene Form. Fig. 95.

3. $n = 1$, $m = o$ giebt $a : a : oc = oP = \infty a : \infty a : c$

die gerade Endfläche oder das Pinakoid, ein zur H.E. paralleles Flächenpaar durch die Endpunkte der c-Achse.

$n \gtrless 1$, $m = o$ giebt $a : na : oc = \infty a : \infty a : c$

wieder die gerade Endfläche.

4. $n \gtrless 1$, $m \gtrless 1$ giebt $a : na : mc = mPn$

ditetragonale Pyramide. Fig. 97.

5. $n \gtrless 1$, $m = \infty$ $a : na : \infty c = \infty P n$

bitetragonale Säule, achtseitig, offen in der Richtung der c-Achse.

$n = \infty$, $m = o$, $a : \infty a : oc = oP$

wieder die gerade Endfläche.

Fig. 95.

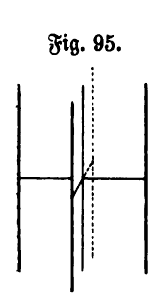


Fig. 95 a.

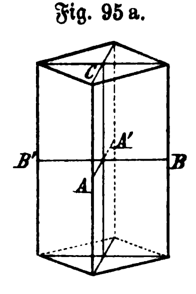
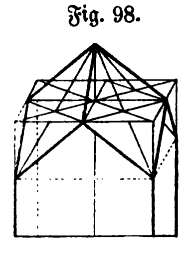


Fig. 98.



6. $n = \infty$, $m \gtrless 1$, $a : \infty a : mc = mP\infty$

quadratische Pyramide zweiter Art, gegen die erste quadratische Pyramide um 45° gedreht, so daß die Polkanten der Pyramide erster Art in den Flächen derjenigen zweiter Art liegen. Fig. 96.

7. $n = \infty$, $m = \infty$ $a : \infty a : \infty c = \infty P\infty$

quadratische Säule zweiter Art, gegen die erste quadratische Säule um 45° gedreht, offen in der Richtung der c-Achse.

$n = o$, $m = o$, $a : oa : oc = oP$

giebt wieder die gerade Endfläche.

$n = o$, $m \gtrless 1$, $a : oa : mc = \infty a : a : \infty c = \infty P\infty$

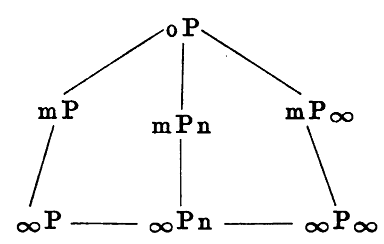
giebt wieder die zweite quadratische Säule.

$n = o$, $m = \infty$, $a : oa : \infty c = oa : oa : c$

gibt die c-Achse.

Das quadratische System besteht somit ebenfalls aus sieben Formen. Nur drei derselben sind geschlossen und treten daher selbständig auf, die drei Säulen dagegen und die gerade Endfläche können nur in Kombinationen Krystalle umgrenzen.

Zusammenstellung nach Naumann:



Hemiedrie.

122. Von den Halbflächnern des quadratischen Systems seien nur diejenigen der sphenoidischen Hemiedrie erwähnt, die aus den Vollflächnern durch Wachsen der Flächen abwechselnder Oktanten entstehen.

1. $\frac{1}{2}(a : a : mc) = \frac{mP}{2}$, quadratisches Tetraeder, umgrenzt von vier gleichschenkligen seitlichen Dreiecken (vgl. Fig. 87). Vier gleiche seitliche Kanten und zwei den a-Achsen parallele gleiche Kanten, die gemeinschaftlichen Grundseiten je zweier Gegendreiecke. Auf eine Fläche gestellt macht der Krystall den Eindruck einer schiefen dreiseitigen Pyramide im Gegensatz zum regulären Tetraeder, daher auch die Bezeichnung Sphenoid.
2. $\frac{1}{2}(a : na : mc) = \frac{mPn}{2}$, gebrochenes Sphenoid oder quadratisches Skalenoeder, wegen der vier im Zickzack laufenden Mittelkanten; an den Enden der c-Achse zwei kürzere scharfe und zwei längere stumpfe Polkanten abwechselnd. Die Enden der c-Achse bezeichnet man häufig als Polecken. Vgl. hiermit die Zeichnung des hexagonalen Skalenoeders mit sechs Zickzackmittelkanten (Fig. 103).

Die anderen Hemieder unterscheiden sich nicht von den Holoedern.

123. Kombinationen.

$\infty P . oP$ Die Kombination hat das Aussehen eines Quaders bezw. Würfels. Während sich jedoch bei dem Würfel, als einem regulären Krystall, sämtliche Flächen physikalisch gleich verhalten, zeigt hier das Flächenpaar der geraden Endfläche ein von den Flächen der Säule verschiedenes physikalisches Verhalten (Fig. 95a).

$P . P\infty . \infty P . \infty P\infty$ Grundform die quadratische Pyramide erstere Art. Die zweite quadratische Pyramide schneidet die Polkanten, die erste quadratische Säule die Basiskanten derselben ab, endlich werden noch die Kanten der ersten quadratischen Säule von den Flächen der zweiten gleichmäßig abgestumpft. Zinnstein.

$P . \infty P\infty$ Die Basisecken der ersten quadratischen Pyramide werden von der zweiten quadratischen Säule gleichmäßig abgestumpft. Zirkon, allerdings mit stärkerer Entwickelung der Säule (Fig. 98).

$P . 2P . \frac{1}{2}P . \frac{1}{3}P\infty . oP$ Grundform erste quadratische Pyramide. Eine steilere Pyramide derselben Art schärft die Basiskanten zweiflächig, eine flachere Pyramide derselben Art die Polecken von den Flächen aus vierflächig zu. Eine noch flachere Pyramide zweiter Art schärft die Polecken von den Polkanten aus zu und die gerade Endfläche schneidet die Polecken gleichmäßig ab.

Rhombisches System.

124. Parallelperspektive Zeichnung des Achsenkreuzes.

Die Winkelgrößen bleiben wie früher, dagegen ist wegen der Ungleichheit der Achsen

$$OC \lessgtr OB \text{ und } OA \lessgtr \frac{1}{3} OB$$

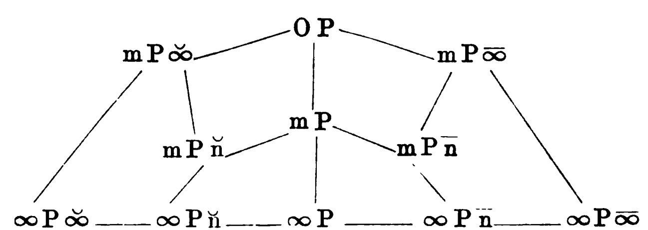
Die rhombischen Krystallformen.

125. Die Flächen des allgemeinsten Körpers gehen von

$a : nb : mc = mP\bar{n}$ (gelesen: mP lang n): eine rhombische Pyramide,

eigentlich eine über dem durch die Achsenabschnitte a und n b bestimmten Rhombus der H.E. senkrecht errichtete Doppelpyramide von der Höhe m c. Bei der Naumannschen Schreibweise bezieht sich der Parameter vor P wieder auf die c-Achse, derjenige nach P auf die längere Quer- oder Makroachse b, wenn das Zeichen „lang —" und auf die kürzere Längs- oder Brachyachse a, wenn das Zeichen „kurz ⌣" ist.

Giebt man m und n wieder alle möglichen Werte, so erhält man sämtliche rhombische Krystallformen; in Naumannscher Zusammenstellung:



Die einzige geschlossene Form ist die rhombische Pyramide m P, die bald nach der Querachse ($mP\bar{n}$), bald nach der Längsachse ($mP\breve{n}$) ausgezogen ist und alsdann als Makro- bezw. Brachypyramide bezeichnet wird.

Wie die Säule oder das vertikale Prisma ∞P nach der c-Achse offen und als Brachysäule $\infty P\breve{n}$ in der Richtung der a-Achse, als Makrosäule $\infty P\bar{n}$ in derjenigen der b-Achse ausgezogen ist, so stellt $mP\breve{\infty}$ ein nach der a-Achse offenes Längsprisma und $mP\bar{\infty}$ ein nach der b-Achse offenes Querprisma dar.

Endlich erscheint außer dem basischen Pinakoid oder der geraden Endfläche oP ein der Querebene (bc) paralleles Flächenpaar, die Querfläche oder das Makropinakoid $\infty P\bar{\infty}$, und ein solches der Längsebene (ac) parallel, das Längsprisma oder Brachypinakoid $\infty P\breve{\infty}$; im ganzen drei Endflächen oder Pinakoide durch die Endpunkte der Achsen.

Die Hemieder zerfallen in Parallelflächenpaare.

126. Kombinationen.

$OP . \infty P$ Kurze rhombische Säule, tafelartig abgeschlossen durch die stark entwickelte gerade Endfläche. Schwerspat. Fig. 99.

Richtet man den Krystall auf, d. h. macht man die b-Achse zur c-Achse, so geht die gerade Endfläche über in die Längsfläche, die Säule in das Querprisma und der Krystall kann gedeutet werden als Kombination von $\infty P \breve{\infty} . P \bar{\infty}$. Fig. 99a.

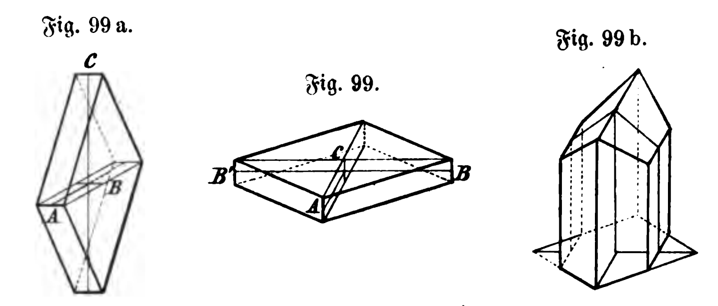


Fig. 99 a. Fig. 99. Fig. 99 b.

$\infty P \breve{\infty} . \infty P \bar{\infty} . oP$ hat die Gestalt eines Würfels. Während sich jedoch bei regulären Krystallen sämtliche Flächen physikalisch gleich verhalten, ist dies hier nur noch für parallele Flächenpaare der Fall.

$\infty P . P \breve{\infty} . \infty P \breve{\infty}$ Die Säule zweiflächig, dachartig, von rechts und links her gleichmäßig zugeschärft vom Längsprisma und die Säulenkanten rechts und links gleichmäßig abgestumpft durch die Längsfläche. Arragonit mit stark entwickelter Säule: Fig. 99b. Der Querschnitt ein Sechseck mit Winkeln von beinahe 120°.

Monoklines System.

127. Parallelperspektive Zeichnung des Achsenkreuzes.

Alle drei Achsen beliebig groß, gewöhnlich $c > b > a$. Bezüglich der Lage ist $\sphericalangle bc = 90$ und $\sphericalangle ac$ beliebig, daher heißt die b-Achse Ortho-, die a-Achse schiefe oder Klinoachse. Ebene $(ac) \perp b$ ist die einzige Symmetrieebene. Die Krystalle sind nur noch rechts wie links, nicht mehr oben wie unten und vorne wie hinten, daher wird die untere Hälfte der c-Achse mit c', die hintere Hälfte der a-Achse mit a' bezeichnet.

Die monoklinen Krystallformen.

128. Das System besitzt keine geschlossenen Formen mehr. Sämtliche Krystalle sind Kombinationen; so stellt z. B.

$$a : b : c = a' : b : c' = + P$$

ein Flächenpaar in den beiden vorderen oberen nebst dem dazu parallelen in den beiden hinteren unteren Oktanten dar (Fig. 100). Sämtliche vier Flächen bilden ein, in der Richtung der die Endpunkte der c- und a-Achse verbindenden Kante offenes, vorderes schiefes Prisma oder eine vordere Halbpyramide, da dieselbe erst mit

$$a' : b : c = a : b : c' = -P,$$

einem hinteren schiefen Prisma bezw. hinterer Halbpyramide zusammen die monokline Vollpyramide ergiebt.

Dieselbe ist spitz oder stumpf, je nachdem m $\gtrless$ 1 und, nach der Ortho- bezw. Klinoachse ausgezogen, als

$$(a : nb : mc,\ a' : nb : mc) = m\bar{P}n \text{ Orthopyramide}$$

(gelesen: mP gerad n) bezw.

$$(na : b : mc,\ na' : b : mc) = m\grave{P}n \text{ Klinopyramide}$$

(gelesen: mP schief n) zu bezeichnen.

n bezieht sich auf die Ortho- bezw. Klinoachse, je nachdem der Strich „gerade" oder „schief" P durchschneidet.

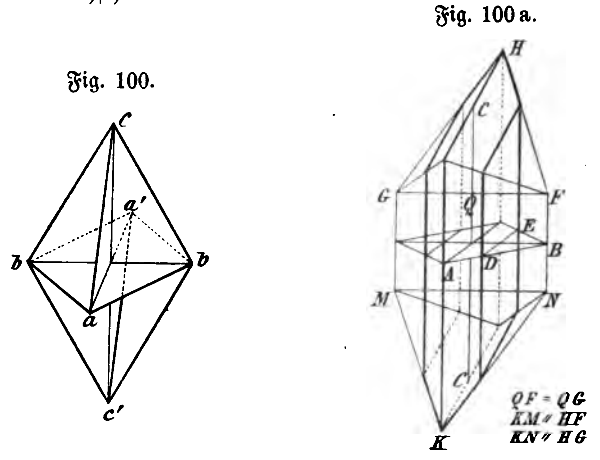
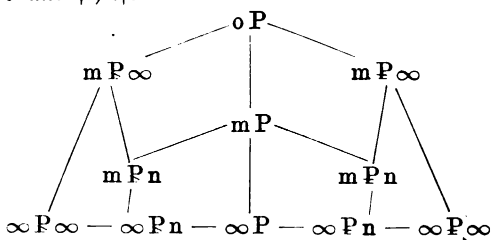


Fig. 100. Fig. 100 a.

Giebt man m und n alle möglichen Werte, so erhält man dieselbe Zusammenstellung wie beim rhombischen System, nur statt der Zeichen lang und kurz die Zeichen gerade und schief:



Das System besteht sonach aus

Halbpyramiden oder schiefen Prismen	$\pm mP, \pm m\bar{P}n, \pm m\breve{P}n$,
Säulen oder vertikalen Prismen	$\infty P, \infty\bar{P}n, \infty\breve{P}n$,
Längsprismen	$m\breve{P}\infty$,
Querprismen	$m\bar{P}\infty$,

Endflächen oder Pinakoiden:

$0P = c : \infty a : \infty b = 0c : a : b$	basisches Pinakoid, schiefe Endfläche	$\parallel (ab)$
$\infty\bar{P}\infty = \infty c : a : \infty b$	Orthopinakoid oder Querfläche	$\parallel (bc)$
$\infty\breve{P}\infty = \infty c : \infty a : b$	Klinopinakoid oder Längsfläche	$\parallel (ca)$

129. Kombinationen.

$\infty P \,.\, \infty\breve{P}\infty \,.\, P$. Vertikale Säule, deren Kanten rechts und links von der Längsfläche $\parallel (ac)$ abgestumpft werden. Das vordere schiefe Prisma bildet einen zweiflächigen dachartigen Abschluß an den Enden der c-Achse. Gips, mit stark entwickelter Längsfläche. Fig. 100 a.

Triklines System.

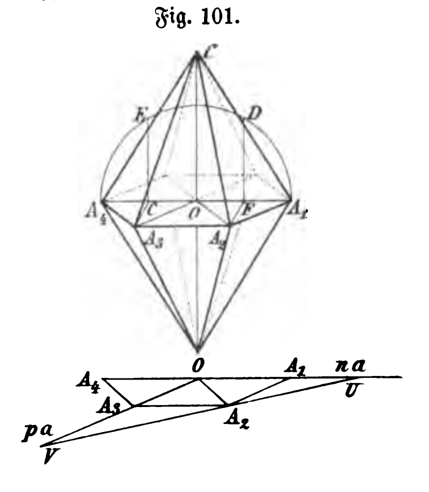
130. Die Ableitung der Formen dieses und des diklinen Systems ist dieselbe wie beim monoklinen. Jede Form besteht nur noch aus zwei parallelen Flächen, so daß z. B. die geschlossene trikline Pyramide eine Kombination von 4 Viertelspyramiden, d. h. von 4 Paaren paralleler Flächen, deren jedes vom anderen physikalisch verschieden ist, darstellt.

Dikline Krystalle hat man bis jetzt in der Natur nicht gefunden, wohl aber künstlich dargestellt.

Triklin: Kupfervitriol.

Hexagonales System.

Fig. 101.



131. Parallelperspektive Zeichnung des Achsenkreuzes.

Fig. 101: Trage auf den freien Schenkeln der an den Durchmesser $A_1A_4 = 2a$ in G und F, den Projektionen der Eckpunkte E und D des regelmäßigen Sechsecks A_1DEA_4.. angelegten $\sphericalangle\, OFA_2 = \sphericalangle\, A_4GA_3 = 60^\circ$ die Strecken $FA_2 = GA_3 = \frac{1}{3}\, DF$ ab, so sind OA_1, OA_2, OA_3 die drei gleichwertigen, in der H.E. unter 60° gegen einander geneigten a-Achsen in parallelperspektiver Zeichnung. Vgl. 30). $OC \perp A_1A_4$ ist die vierte ungleichwertige c-Achse.

Die hexagonalen Krystallformen.

132. Es genügt, das Verhältnis der c-Achse zu den Abschnitten nur zweier der drei a-Achsen anzugeben, dadurch ist auch der Abschnitt auf der dritten a-Achse mit bestimmt; denn, schneidet eine Fläche des allgemeinsten Körpers

$$a : na : pa : mc$$

die H.E. nach UA_2V, so verhält sich, Fig. 101,

$$\frac{OV}{OU} = \frac{A_3V}{A_3A_2} \text{ oder } \frac{pa}{na} = \frac{pa - a}{a} \text{ woraus } p = \frac{n}{n-1}$$

Die Flächen des allgemeinsten Körpers gehen somit von a : na : mc und man erhält wieder sämtliche Formen, indem man m und n alle möglichen Werte giebt.

Fig. 101 a.

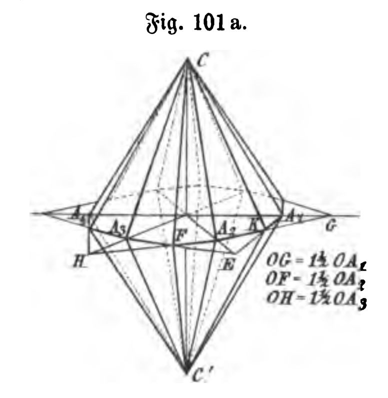
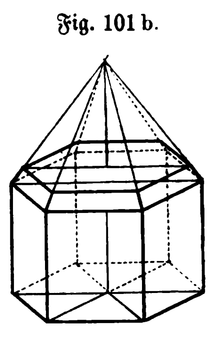


Fig. 101 b.



Für $m \lesseqgtr 1$ und

1. $n = 1$ folgt $a : a : mc = mP$,

   erste hexagonale Pyramide, eine über einem regelmäßigen Sechseck stehende senkrechte Doppelpyramide mit 12 gleichen Pol- und 6 gleichen Grundkanten, umgrenzt von 12 gleichschenkligen kongruenten Dreiecken. Fig. 101.

2. $n > 1$ $a : na : mc = mPn$,

   dihexagonale Pyramide, eine über einem symmetrischen gleichseitigen aber nicht regelmäßigen Zwölfeck, mit abwechselnd gleichen Winkeln, senkrecht errichtete Doppelpyramide, mit 2 . 12 abwechselnd gleichen Pol- und 12 gleichen Grundkanten. Fig. 101 a für $n = 1^1/_2$.

3. $n = 2$ $a : 2a : mc = mP2$,

   zweite hexagonale Pyramide, gegen diejenige erster Art um 30° gedreht. Die Kanten der ersten hexagonalen Pyramide liegen in den Flächen der zweiten.

$n > 2$ somit $p < 2$,

dann nehme man das Parameterverhältnis der ersten und dritten a-Achse; dies giebt

$a : pa : mc = mPp$ wieder die dihexagonale Pyramide,

$n = \infty$ somit $p = 1$ giebt

$a : a : mc = mP$ wieder die erste hexagonale Pyramide,

$n < 1$ und $n = 0$ unmöglich, hieraus folgt

Satz: n unterliegt der Beschränkung $1 < n < 2$!

Für $m = \infty$ und

4. $n = 1$, $a : a : \infty c = \infty P$, erste hexagonale Säule

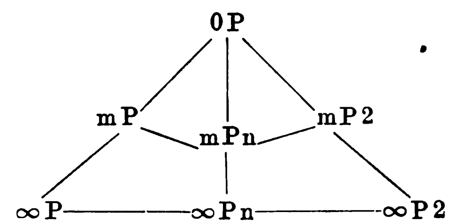
5. $n > 1$, $a : na : \infty c = \infty Pn$, dihexagonale Säule

6. $n = 2$, $a : 2a : \infty c = \infty P2$, zweite hexagonale Säule

Für $m = 0$ und

7. $n \geqq 1$, $a : na : 0c = \infty a : \infty a : c = 0P$ die gerade Endfläche

Das System besteht somit wieder aus sieben Formen:



Hemiedrie.

133. Von den hexagonalen Halbflächnern seien nur diejenigen erwähnt, die der rhomboedrischen Hemiedrie angehören. Sie entstehen nach dem ersten Hemiedriegesetz: Abwechselnde Sextanten wachsen. Man erhält zwei neue Körper:

1. $$\frac{1}{2}(a : a : mc) = \pm \frac{mP}{2} = \pm mR$$

das Rhomboeder, Halbflächner der ersten hexagonalen Pyramide, umgrenzt von 6 kongruenten Rhomben; 6 gleiche Grundkanten im Zickzack und 2 . 3 gleiche Polkanten. Kalkspat. Dolomit. Spateisenstein. Eisenglanz. Fig. 102.

2. $$\frac{1}{2}(a : na : mc) = \frac{mPn}{2}$$

das Skalenoeder oder gebrochene Rhomboeder, da die Flächen des vorigen Körpers nach der langen Diagonale geknickt erscheinen. Halbflächner der dihexagonalen Pyramide mit 6 im Zickzack verlaufenden

gleichen Mittelkanten und 2 . 6 abwechselnd gleichen spitzen bezw. stumpfen Polkanten; bei Gleichgewicht umgrenzt von 2 . 6 kongruenten ungleichseitigen Dreiecken. Kalkspat. Fig. 103 für $n = 1^1/_2$.

Die übrigen Halbflächner unterscheiden sich nicht von ihren Vollflächnern.

Am häufigsten findet man folgende Rhomboeder in der Natur, entweder allein oder in Kombination:

$\frac{1}{2}$ (a : a : c) $= + R$, das Hauptrhomboeder. Kalkspat, sogen. Doppelspat von Island und Auerbach an der Bergstraße.

$-\frac{1}{2}$ (a : a : 2 c) $= - 2R$, das nächst spitzere Rhomboeder, dessen Polkanten in den Flächen von $+ R$ liegen, so daß $+ R$ an $- 2R$ die Polkanten gleich mäßig abstumpft; entstanden durch Wachsen der Flächen derjenigen Sextanten der Pyramide 2P, die bei der Bildung von $+ R$ überwachsen wurden.

$-\frac{1}{2}$ (a : a : $\frac{1}{2}$ c) $= - \frac{1}{2} R$, das nächst stumpfere Rhomboeder, dessen Flächen durch die Polkanten von $+ R$ gehen, so daß $- \frac{1}{2} R$ die Polkanten von $+ R$ gleichmäßig abstumpft.

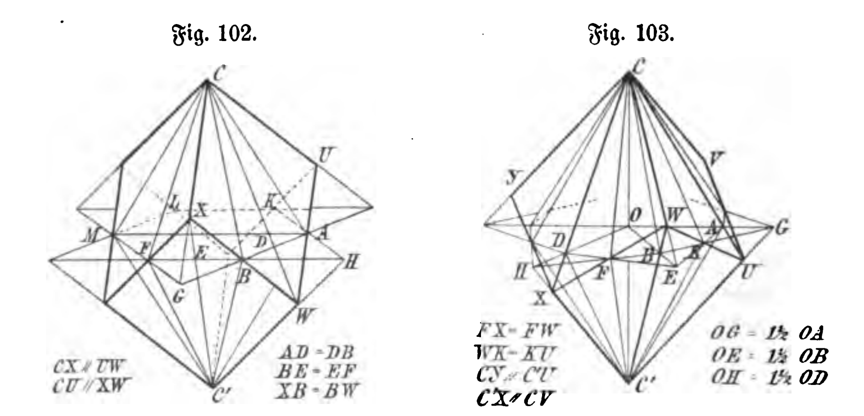


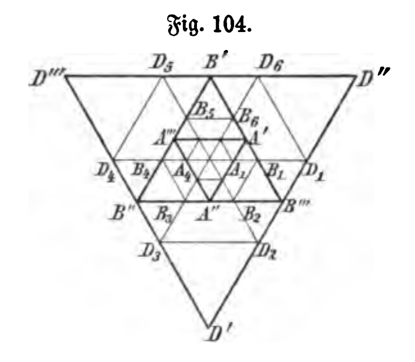
Fig. 102. Fig. 103.

Quenstedt's Projektion.

134. Um die Verhältnisse, wie die Krystallflächen in Kombination aneinander auftreten, beurteilen zu können, bedient man sich am besten der Quenstedtschen Projektion: Man denkt sich sämtliche Flächen eines Krystalls parallel durch den einen Endpunkt C der c-Achse verschoben, dann ist der Schnitt dieses Ebenenbündels mit der zur c-Achse senkrechten H.E. das Quenstedtsche Bild des Krystalls.

Fig. 104: Das regelmäßige Sechseck $B_1 B_2 \ldots B_6$ stellt die erste hexagonale Pyramide dar; man hat sich nur die Ecken desselben mit dem über der Zeichnungsebene senkrecht über O liegenden Endpunkt der c-Achse verbunden zu denken. Die abwechselnden Seiten verlängert, entsteht das Hauptrhomboeder B′B″B‴.

Fig. 104.



Die nächstspitzere Pyramide $a : a : 2c = \frac{1}{2} a : \frac{1}{2} a : c$ ist dargestellt durch das reguläre Sechseck $A_1 A_2 \ldots A_6$, daher A′A″A‴ das nächstspitzere Rhomboeder — 2R; Sechseck $D_1 D_2 \ldots D_6$ stellt die nächststumpfere Pyramide $2a : 2a : c = a : a : \frac{1}{2} c$ dar, somit D′D″D‴ das nächststumpfere Rhomboeder $- \frac{1}{2}$ R.

Aufgabe: Bilde die regulären Krystalle nach dem Quenstedtschen Verfahren ab.

135. Kombinationen.

P . P2 . ∞P . ∞P2 . 0P. Grundform die erste hexagonale Pyramide. Die zweite hexagonale Pyramide schneidet die Polkanten, die erste hexagonale Säule die Grundkanten gleichmäßig ab; an letzterer stumpft die zweite hexagonale Säule selbst wieder die Kanten ab. Die gerade Endfläche nimmt die Polecken gleichmäßig weg. Smaragd. Fig. 101b zeigt nur ∞P . P . 0P. Apatit.

P . ∞P2 . $\frac{1}{3}$ P2 . 2P. Grundform erste hexagonale Pyramide, deren Grundecken von der zweiten hexagonalen Säule gleichmäßig abgeschnitten werden. Die Polecken werden durch eine stumpfere zweite hexagonale Pyramide, von den Kanten aus, und die Grundkanten durch die spitzere erste hexagonale Pyramide 2P von den Flächen aus zugeschärft.

P . ∞P$\frac{3}{2}$. Die Grundecken der ersten hexagonalen Pyramide werden von den Grundkanten aus zweiflächig zugeschärft.

— 2R . $\frac{1}{2}$ R. Nächstspitzeres Rhomboeder, dessen Polecken von den Kanten aus dreiflächig zugeschärft werden.

$-\frac{1}{2}$R . — 2R. Nächststumpferes Rhomboeder, dessen Grundecken abwechselnd oben und unten, von den Flächen aus, zugeschärft werden.

+R . — 2R. Hauptrhomboeder, dessen Zickzackecken von den Polkanten aus zugeschärft sind.

136. Aufgabe: Bestimme das Parameterverhältnis derjenigen dihexagonalen Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Zwölfeck wäre. Welchem Gesetz widerspricht das Ergebnis?

V. Abschnitt.

Das Vielkant und die Kugel.

Der Keil.

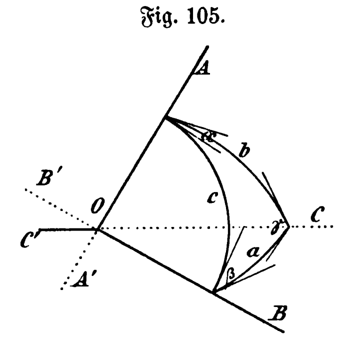
137. Jeder der vier Teile, in welche der Raum durch zwei beliebige Ebenen geteilt wird, heißt ein Keil. Die zur gemeinschaftlichen Schnittgeraden senkrechte Ebene bestimmt die vier Keilwinkel, deren Bezeichnung auf die zugehörigen Keile übertragen wird. Somit

Satz: Scheitelkeile sind gleich. Nebenkeile betragen zusammen 180°.

Das Dreikant.

138. Drei beliebige Ebenen teilen den Raum in 8 Teile mit gemeinschaftlicher Spitze. Jeder derselben heißt Dreikant oder „dreiseitige körperliche Ecke". Fig. 105.

Fig. 105.



Die Winkel, welche die Schnittkanten miteinander einschließen, heißen „Seiten" des Dreikants, gemessen in Grad, Minuten und Sekunden.

Die Keilwinkel, welche die Seitenebenen miteinander bilden, heißen „Winkel" des Dreikants.

Man bezeichnet die Seiten mit a, b, c, ihre Gegenwinkel mit α, β, γ.

Dreikante, die zusammen einen Keil geben, heißen Nebendreikante. Sie haben zwei Kanten gemein und daher auch die von diesen eingeschlossene Seite sowie deren Gegenwinkel, da die dritte Kante des einen Dreikants die Rückverlängerung der dritten Kante des anderen ist. Die übrigen entsprechenden Seiten und Winkel beider Dreikante ergänzen sich zu 180°. Zu jedem Dreikant O—ABC

gehören drei Nebendreikante O—A' B C, O—A B' C, O—A B C'; ferner hat z. B. O—A' B C die Seiten a, 180—b, 180—c und die Winkel α, 180—β, 180—γ.

Dreikante, die eine Kante gemeinsam haben, während die anderen entsprechenden Kanten Gegenstrahlen sind, heißen Scheiteldreikante. Die drei Scheiteldreikante zu O—A B C sind O—A' B C', O—A' B' C, O—A B' C'. Letzteres hat die Seiten a, 180—b, 180—c, die Winkel α, 180—β, 180—γ.

Sind sämtliche entsprechenden Kanten zweier Dreikante Gegenstrahlen, so heißen die Dreikante Gegendreikante. Zu jedem Dreikant O—A B C giebt es nur ein Gegendreikant O—A' B' C'. Obwohl Gegendreikante sämtliche Seiten und Winkel entsprechend gleich haben und daher gleiche Räume ausschneiden, können sie doch nicht zur Deckung gebracht werden, da entsprechende Seiten bezw. Winkel, von der Spitze aus betrachtet, in entgegengesetztem Sinn aufeinander folgen.

Satz: Haben zwei Dreikante entsprechend gleich

1. eine Seite und zwei anliegende Winkel,
2. eine Seite, einen anliegenden und einen gegenüberliegenden Winkel,
3. zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel,
4. zwei Seiten und den Gegenwinkel der größeren,
5. drei Seiten,

und folgen sich die entsprechenden Größen, von der Spitze aus betrachtet, im selben Sinn, so können beide Dreikante zur Deckung gebracht werden und heißen kongruent. Folgen sich die entsprechend gleichen Größen im entgegengesetzten Sinn, so heißen die Dreikante entsprechend gleich oder symmetrisch. Sie schneiden ebenfalls gleiche Räume aus und können zu einer Ebene in symmetrische Lage gebracht werden. Zu welcher?

Wie man sieht, handelt es sich bei der Betrachtung von Dreikanten ausschließlich um Winkelgrößen. Dieselben Beziehungen wie zwischen Zentriwinkel und Kreisbogen finden in allgemeinerer Weise statt zwischen Dreikant und Kugel.

Die Kugel.

139. Eine Kugel entsteht, wenn sich ein Kreis, der sogen. erzeugende oder Großkreis, um einen beliebigen Durchmesser als feste Achse dreht, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt. Hieraus folgt:

1. Alle Punkte der vom Kreisumfang beschriebenen Kugelfläche (Sphäre) haben von einem Punkt innerhalb, dem Kugelmittelpunkt, gleiche Entfernung. Diese Entfernung heißt Kugelhalbmesser oder Radius.
2. Sämtliche Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugelfläche schneiden diese nach erzeugenden oder Großkreisen.

Sphärisches Dreieck (Kugeldreieck).

140. Beschreibt man in jeder der drei Ebenen eines Dreikants mit demselben Halbmesser einen Kreis um die Spitze als Mittelpunkt, so sind diese Kreise

als Durchschnitte einer Kugel mit drei durch ihren Mittelpunkt gelegten Ebenen zu betrachten und das Dreikant schneidet aus dieser Kugelfläche einen von drei Großkreisbögen begrenzten Teil aus, der sphärisches Dreieck heißt. In ihrer Gesamtausdehnung teilen die drei Großkreisebenen, wie den Raum, so auch die Kugeloberfläche in acht sphärische Dreiecke, welche wie die zugehörigen Dreikante als sphärische Neben-, Scheitel- und Gegendreiecke bezeichnet werden. Fig. 105.

Die (Großkreisbogen-)Seiten des sphärischen Dreiecks werden durch ihre Zentriwinkel, d. h. durch die Seiten des zugehörigen Dreikants gemessen. Die in den Ecken an die Großkreise gezogenen Tangenten, siehe Fig. 105, schließen die Winkel des sphärischen Dreiecks ein, denn die Tangente an irgend eine stetig gekrümmte Linie giebt die Richtung letzterer vom Berührungspunkt nach dem unendlich benachbarten Punkt der Linie, kurz gesagt, die Richtung der Linie im betreffenden Punkt an. Diese Tangenten stehen aber auf den zu den jeweiligen Ecken gezogenen Durchmessern, den Schnittgeraden der Großkreisebenen, senkrecht, und da sie in den Großkreisebenen selbst liegen, so schließen sie thatsächlich die Keilwinkel des Dreikants ein, somit

Satz: Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks und des ihm zugehörigen Dreikants sind gleich.

Jeder Satz über die Seiten und Winkel des Dreikants gilt daher auch für das sphärische Dreieck.

Da der Halbmesser zum Schnittpunkt zweier Großkreise, als Lot, die kürzeste Entfernung des Kugelmittelpunkts von der Ebene der den Winkel beider Großkreise bestimmenden Tangenten darstellt, so hat diese Ebene mit der Kugel nur jenen Großkreisschnittpunkt gemein, d. h. sie ist Tangential- oder Berührungsebene. Daher

Satz: Die Berührungsebene an eine Kugelfläche steht auf dem zum Berührungspunkt gezogenen Halbmesser senkrecht.

Satz: Alle durch den Berührungspunkt gezogenen Geraden der Berührungsebene sind Kugeltangenten.

Wichtig ist somit, daß der Winkel zweier Großkreise nicht der Kugelfläche, sondern der im Schnittpunkt der Großkreise an die Kugel gelegten Berührungsebene zu entnehmen ist. Daher gilt auch für die Kugelfläche der

Satz: Die Winkel um einen Punkt herum betragen 360°.

141. Nur wenn man den Halbmesser der Kugel der Größe nach gegeben voraussetzt, ist es möglich, den Winkel zweier Großkreise auch der gekrümmten Kugelfläche selbst zu entnehmen. Betrachtet man den gemeinschaftlichen Durchmesser beider Großkreise als Achse, so schneidet die zu ihr senkrechte Ebene durch den Kugelmittelpunkt die Kugelfläche nach einem Großkreis, welcher als der jener Achse zugehörige Aequator oder Gleicher bezeichnet wird, da er alle Großkreise halbiert, die jene Achse zum gemeinschaftlichen Durchmesser haben. Diese zum Aequator senkrechten Großkreise, die sich sämtlich in den Endpunkten der

Achse, den Polen, durchschneiden, heißen **Meridiane**, eine der Astronomie entnommene Benennung, da die Sonne, das Himmelsgewölbe als eine zur Erdkugel konzentrische Kugelfläche vorausgesetzt, mittags 12 Uhr Ortszeit in dem durch Erweiterung der Ebene des, dem betreffenden Erdort zugehörigen Erdmeridians bis zum Schnitt mit dem Himmelsgewölbe entstehenden konzentrischen Himmelsmeridian steht, letzterer also die Tagesbahn der Sonne vom Aufgangs- bis zum Untergangspunkt halbiert (meridies). Der zwischen zwei Meridiane fallende Aequatorbogen, dessen Sehne mit dem Zirkel durch Einsetzen im einen Endpunkt und Spannen bis zum anderen leicht auf der Kugel abgestochen werden kann, giebt bei bekanntem Kugelhalbmesser das Maß für den Winkel der beiden als Meridiane aufzufassenden Großkreise.

142. Dieser Winkel bezw. sein Nebenwinkel bestimmt zugleich, nach den früheren Betrachtungen über das Messen des Keilwinkels, Flächengröße und Rauminhalt eines jeden der vier sphärischen Zweiecke, in welche die Kugelfläche bezw. ihr Raum durch zwei Großkreise gespalten wird, daher

Satz: Kugelzweiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln verhalten sich der Kugelfläche sowohl als dem Raum nach wie ihre Winkel oder Aequatorbögen.

Ferner folgt bezüglich der Seiten der Kugelzweiecke

Satz: Sämtliche Kugelzweiecke haben gleiche Seiten von 180°.

Da insbesondere die Halb- bezw. Vollkugel als sphärisches Zweieck mit Winkel 180° bezw. 360° betrachtet werden kann, so folgt

Satz: Kugelzweieck und Halb- bezw. Vollkugel vom selben Halbmesser verhalten sich der gekrümmten Fläche sowohl als dem Rauminhalt nach wie der Winkel des Zweiecks zu 180° bezw. 360°.

Großkreisebenen unter 30°, 45°, 60°, 90° schneiden Zweiecke aus, deren gekrümmte Flächen bezw. Rauminhalte

$$\frac{30}{360}, \quad \frac{45}{360}, \quad \frac{60}{360}, \quad \frac{90}{360}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{4}$$

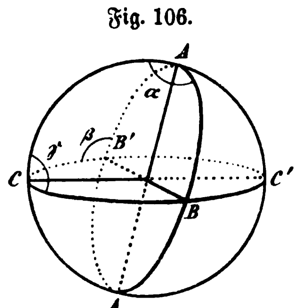
der Fläche bezw. des Rauminhalts der Vollkugel betragen.

Welchen Teil der Vollkugel schneiden zwei Großkreisebenen unter 70° 30′ 40″ aus?

Verhältnis des Kugeldreiecks zu seiner Vollkugel.

143. Das sphärische $\triangle ABC$, dessen Winkel α, β, γ in Grad gegeben seien, wird durch seine drei Nebendreiecke zu drei Kugelzweiecken erweitert, deren jedes einen Winkel mit dem Dreieck gemein hat. Bezeichnet man die Fläche des Dreiecks mit f, diejenige der Kugel mit F, so folgt:

Fig. 106.



$$\left.\begin{aligned}\frac{f+\triangle BCA'}{\frac{1}{2}F} &= \frac{\alpha}{180}\\ \frac{f+\triangle CAB'}{\frac{1}{2}F} &= \frac{\beta}{180}\\ \frac{f+\triangle ABC'}{\frac{1}{2}F} &= \frac{\gamma}{180}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Man sieht, daß die Flächensumme $f+\triangle BCA' + \triangle CAB'$ durch $\triangle A'C'B$ zur halben Kugelfläche ergänzt würde, daß jedoch $\triangle A'C'B = \triangle ACB'$ als Gegendreiecke, somit auch

$$f+\triangle BCA' + \triangle CAB' + \triangle ABC' = \frac{1}{2}F \quad \ldots \quad 2)$$

und daher durch Addition von 1) unter Berücksichtigung von 2)

$$\frac{2f+\frac{1}{2}F}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{180}$$

woraus

$$\frac{2f}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{180}$$

oder

$$\frac{f}{F} = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{720}$$

auch geschrieben

$$\frac{f}{F} = \frac{\varepsilon^0}{720^0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

da man den Ueberschuß der Winkelsumme des sphärischen Dreiecks über diejenige des ebenen als sphärischen Exzeß ε bezeichnet; somit

Satz: Die Fläche des sphärischen Dreiecks verhält sich zur zugehörigen Kugelfläche wie sein sphärischer Exzeß zu acht Rechten.

Derselbe Satz gilt für den, durch die Seitenflächen des dem sphärischen Dreieck zugehörigen Dreikants aus der Vollkugel ausgeschnittenen Raum.

Folgerungen.

144. Aus 3) folgt, da das Verhältnis der Flächen reell und positiv ist, daß dies auch für das Verhältnis der Winkelgrößen zutreffen muß, d. h.

$$\alpha+\beta+\gamma-180 > 0 \qquad \text{oder} \qquad \alpha+\beta+\gamma > 180$$

daß somit die Winkelsumme des sphärischen Dreiecks größer ist als diejenige des

ebenen Dreiecks, und da jeder einzelne Winkel $< 180^{\circ}$ sein muß, soll das sphärische Dreieck nicht in ein Zweieck übergehen, so ist

$$\alpha + \beta + \gamma < 3 \,.\, 180^{\circ}$$

Daher

Satz: Die Winkelsumme des sphärischen Dreiecks und des Dreikants liegt zwischen zwei Rechten und sechs Rechten.

145. Um verschiedene sphärische Dreiecke f, f', f'' .... derselben Kugel, deren sphärische Exzesse ε, ε', ε'' ... sein mögen, vergleichen zu können, vergleichen wir sie zunächst einzeln mit der Kugel, gemäß 143)

$$\frac{f}{F} = \frac{\varepsilon}{720}, \qquad \frac{f'}{F} = \frac{\varepsilon'}{720}, \qquad \frac{f''}{F} = \frac{\varepsilon''}{720}$$

woraus

$$f : f' : f'' : \ldots = \varepsilon : \varepsilon' : \varepsilon'' : \ldots, \quad \text{d. h.}$$

Satz: Die Flächen bezw. Rauminhalte sphärischer Dreiecke derselben Kugel verhalten sich wie ihre sphärischen Exzesse.

146. Gehören die Dreiecke verschiedenen Kugeln an, so ist

$$\frac{f}{F} = \frac{\varepsilon}{720}, \qquad \frac{f'}{F'} = \frac{\varepsilon'}{720}, \qquad \frac{f''}{F''} = \frac{\varepsilon''}{720} \ldots$$

woraus

$$\frac{f}{f'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \cdot \frac{F}{F'} \quad \text{u. s. w.}$$

oder

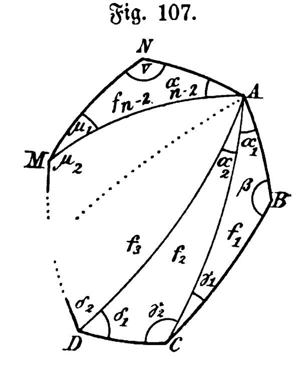
$$f : f' : f'' : \ldots \quad = \varepsilon F : \varepsilon' F' : \varepsilon'' F'' : \ldots$$

Sphärisches Vieleck (Kugelvieleck).

147. Aehnliche Sätze wie die seitherigen gelten für Vielkant und zugehöriges sphärisches Vieleck.

Legt man durch je zwei aufeinander folgende Strahlen eines Bündels von n Strahlen eine Ebene, so sind diese n Ebenen die Seitenebenen eines n-Kants (n-seitige körperliche Ecke), welches aus einer, um seine Spitze beschriebenen Kugelfläche das von n-Großkreisbögen umgrenzte zugehörige sphärische n-Eck ausschneidet. Zerlegt man das n-Kant von einer Kante OA aus mittels der n — 3 Diagonalebenen, welche nach den übrigen Kanten, mit Ausnahme der beiden benachbarten, zu spannen möglich sind, in n — 2 Dreikante, so wird auch die Fläche f des zugehörigen Kugelvielecks von der Ecke A aus durch n — 3 Diagonalgroßkreisbögen in n — 2 sphärische Dreiecke f_1, f_2, f_3 ... f_{n-2} zerlegt, und es ist gemäß 143)

Fig. 107.



$$\frac{f_1}{F} = \frac{\alpha_1 + \beta + \gamma_1 - 180}{720}$$

$$\frac{f_2}{F} = \frac{\alpha_2 + \gamma_2 + \delta_1 - 180}{720}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f_{n-2}}{F} = \frac{\alpha_{n-2} + \mu_2 + \nu - 180}{720}$$

Die Addition dieser n — 2 Gleichungen giebt

$$\frac{f}{F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu + \nu - (n-2)\,180}{720}$$

oder

$$\frac{f}{F} = \frac{\varepsilon^0}{720^0}$$

da der Ueberschuß der Winkelsumme des sphärischen n-Ecks über die (n — 2) 180° betragende Winkelsumme des ebenen wieder als sphärischer Exzeß ε bezeichnet wird; somit

Satz: Die Fläche eines sphärischen Vielecks verhält sich zur zugehörigen Kugelfläche wie sein sphärischer Exzeß zu acht Rechten.

Ferner folgt: Sphärische Vielecke derselben Kugel verhalten sich wie ihre Exzesse. Dieselben Sätze gelten für die Rauminhalte der von den Kugelvielecken abgegrenzten zugehörigen Vielkante.

Aehnliche Folgerungen wie früher ergeben, daß

$(n-2)\,180^0 < \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu + \nu < n \,.\, 180^0$, d. h.

Satz: Die Summe der Winkel eines Vielkants oder sphärischen Vielecks von n Seiten liegt zwischen (n — 2) 180° und n . 180°.

Je kleiner der sphärische Exzeß ist, desto mehr nähert sich das sphärische Vieleck dem ebenen. Ist $\varepsilon = 0$, so folgt $\frac{f}{F} = 0$, somit $F = \infty$, d. h. die Kugel geht in eine Ebene über, das Vieleck ist ein ebenes.

Der Euler'sche Satz.

148. Denkt man sich den allgemeinsten Fall, daß von einem beliebigen Punkt O nach allen Richtungen des Raums die verschiedensten Vielkante ausstrahlen und die zugehörigen Kugelvielecke gezeichnet seien, etwa dadurch entstanden, daß von einem beliebigen Punkt O innerhalb eines von lauter ebenen Vielecken verschiedenster Art umgrenzten Körpers, eines sogen. Vielflächners oder Polyeders, diese Vielecke durch ein Strahlenbündel auf eine um O beschriebene Kugel abgebildet werden, so entsteht auf dieser ein Netzwerk von ebensoviel sphärischen Vielecken, Großkreisbögen und Kreuzungspunkten, als der Vielflächner Flächen, Kanten und Ecken besitzt. Sind diese in der Zahl s, k, e vorhanden und ist f_m die Fläche eines sphärischen m-Ecks, dessen Winkel α_m, β_m, $\gamma_m \ldots$ sein mögen, so liefert 147) auf sämtliche Vielecke angewendet die s Gleichungen

$$\frac{f_m}{F} = \frac{\alpha_m + \beta_m + \gamma_m + \ldots - (m-2)\,180}{720}$$

$$\frac{f_n}{F} = \frac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \ldots - (n-2)\,180}{720} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

. . . .

Da die Summe aller f die Kugelfläche ausmacht, so folgt durch Addition

$$\frac{F}{F} = \frac{\Sigma(\alpha, \beta, \gamma \ldots) - (m + n + p + \ldots)\,180 + 2\,.\,180\,.\,s}{720} \quad . \quad 2)$$

Berücksichtigt man, daß die Gradsumme $\Sigma(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$ sämtlicher Vieleckswinkel, da diese um die e Kreuzungspunkte herumliegen und an jedem Kreuzungspunkt die in der Tangentialebene zu messende Winkelsumme 360° ist, e . 360 beträgt, daß ferner die Anzahl der Vieleckswinkel oder Seiten

$$w = m + n + p + \ldots = 2k \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

d. h. der doppelten Kantenzahl gleich ist, da sich beim Zusammensetzen der einzelnen Vielecke zum Vielflächner bezw. zur Kugel zwei Seiten zu einer Kante bezw. einem Großkreisbogen vereinigen, während die Winkelzahl ungeändert bleibt, so folgt aus 2)

$$1 = \frac{e\,.\,360 - 2k\,.\,180 + 2\,.\,180\,.\,s}{720}$$

vereinfacht

$$\frac{e - k + s}{2} = 1$$

oder

$$e + s = k + 2 \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

d. h.

Satz: Die Anzahl der Ecken und Flächen eines Vielflächners ist um 2 größer als die Anzahl der Kanten. (Eulers Satz vom Polyeder.) [1])

148a. Anderer Beweis: Verbindet man sämtliche Ecken des Vielflächners durch einen zum Ausgangspunkt zurückkehrenden Zug von k_1 Kanten, der sich nicht selbst durchschneidet, so ist

$$e = k_1 + 1 \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Schneidet man den Vielflächner nach diesem Kantenzug auf, so ergiebt die Betrachtung des Netzes, daß die Anzahl der Flächen um 1 größer ist als die Anzahl k_2 der Kanten, die nicht aufgeschnitten wurden:]

$$s = k_2 + 1 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

somit, da die Anzahl aller Kanten

$$k = k_1 + k_2$$

durch Addition von 1) und 2) die gesuchte Beziehung

$$e + s = k + 2$$

[1]) Leonhard Euler, berühmter Mathematiker, geb. 1707 in Basel, 1725 in Petersburg, 1741 in Berlin, 1766 wieder in Petersburg, wo er ein oder zwei Jahre später erblindete, ohne seine Thätigkeit aufzugeben bis zu seinem Tod daselbst 1783.

149. Aus der Beziehung $w = 2k$ folgt, daß die Vieleckswinkel stets in gerader Anzahl vorkommen, daß somit Vielecke von ungerader Seitenzahl, desgleichen Ecken mit ungerader Kantenzahl nur in gerader Anzahl an der Umgrenzung eines Vielflächners Anteil haben können.

Gradsumme der Vieleckswinkel eines Vielflächners.

150. Sie ist wie diejenige der Winkel des sphärischen Netzes in 148) ebenfalls eine von e abhängige Größe. Wird die Oberfläche des Vielflächners von z_3 Dreiecken, z_4 Vierecken u. s. f. gebildet, so ist die Anzahl s aller Vielecke

$$s = z_3 + z_4 + z_5 + \ldots$$

und die Anzahl w aller Vieleckswinkel

$$w = 3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + \ldots = 2k$$

Da die Winkel eines ebenen n-Ecks $(n - 2)\,2R$ betragen, so ist die Summe aller Vieleckswinkel in Rechten ausgedrückt:

$$\begin{aligned} N &= 2[(3-2)\,z_3 + (4-2)\,z_4 + (5-2)\,z_5 + \ldots] \\ &= 2(3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + \ldots) - 4(z_3 + z_4 + z_5 + \ldots) \\ &= 2\,.\,2k - 4s \\ &= 4(k - s) \quad \text{somit, da nach Euler } k - s = e - 2 \\ N &= (e-2)\,.\,4R = (e-2)\,360^\circ \end{aligned}$$

also um 720° kleiner als die Gradsumme $\Sigma(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$ der Vieleckswinkel der sphärischen Abbildung des Vielflächners.

151. Dasselbe Ergebnis folgt aus der Betrachtung der zentralprojektiven Abbildung des Vielflächners, statt auf eine Kugel, auf eine Ebene. Jedes n-Eck des Vielflächners bildet sich wieder als n-Eck ab, die Winkelsumme der Abbildung beträgt also dieselbe Anzahl Grade wie diejenige der Vielecke des Vielflächners. Man hat nur den Projektionsmittelpunkt so zu wählen, daß, um die Abbildung sämtlicher Winkel zu erhalten, kein Teil der Abbildung ins Unendliche fällt und kein Vieleck sich als Gerade abbildet. Dies wird z. B. erreicht, wenn Projektionsmittelpunkt und Vielflächner auf entgegengesetzten Seiten der Bildebene liegen und keine der Vielecksebenen in ihrer Ausdehnung durch den Projektionsmittelpunkt geht. Bildet sich der Vielflächner als u-Eck ab, in dessen Inneres die Bildpunkte von i Ecken fallen, so ist die Gesamtzahl der Vielflächnerecken

$$e = u + i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

und die Gradsumme sämtlicher Winkel der Abbildung setzt sich zusammen

1. aus der doppelten Summe der Vieleckswinkel des u-Ecks, denn bei jeder der zuhörigen u körperlichen Ecken des Vielflächners ergeben die vom Projektionsmittelpunkt aus sichtbaren Vieleckswinkel dasselbe Abbild wie die verdeckten;
2. aus der Summe der, um die i Innenecken herum liegenden Winkel,

daher $$N = 2(u - 2)\,2R + i\,.\,4R \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$
$$= (u + i - 2)\,4R$$
somit wegen 1) $$= (e - 2)\,.\,4R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des Drei- bezw. Vielkants.

152. Dieselben entsprechen im allgemeinen denen des ebenen Drei= bezw. Vielecks; z. B.

Satz: Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.

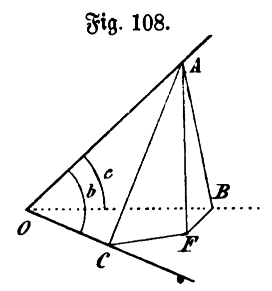


Fig. 108.

Beweis: Es sei b = c. Fälle von einem beliebigen Punkt A der Kante O A des Dreikants O — A B C das Lot A F auf die gegenüberliegende Seitenfläche a und vom Fußpunkt F auf die beiden übrigen Kanten die Lote F B und F C. Dann ist

$$OB \perp AF \qquad \text{und} \qquad OB \perp BF$$
daher
$$OB \perp (ABF) \qquad \text{somit} \qquad OB \perp AB$$
und daher
$\sphericalangle$ ABF der Keilwinkel β, ähnlich ergiebt sich, daß $\sphericalangle$ ACF der Keilwinkel γ.

Aus $\triangle AOB \cong \triangle AOC$ folgt aber $AB = AC$

somit $\triangle AFB \cong \triangle AFC$, und $\beta = \gamma$.

153. Satz: Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.

Beweis. Es sei $b > c$, dann ist $AC > AB$ und somit, wenn $\triangle AFB$ um AF in die Ebene des $\triangle ACF$ gedreht wird, in dem neu entstandenen $\triangle ABC$ der Außenwinkel $\beta > \gamma$. Fig. 108.

154. Satz: Die Summe zweier Seiten eines Dreikants ist größer als die dritte.

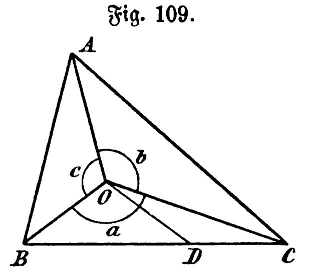


Fig. 109.

Beweis: Fig. 109. Es sei $a > b > c$. Klappe das beliebige $\triangle AOB$ um OB aus der Seitenebene c in die Lage BOD der Seitenebene a und schneide das Dreikant durch die Ebene (ABDC). Dann ist

$$AB + AC > BC$$
oder
$$BD + AC > BD + DC \quad \text{d. h.}$$
$$AC > DC$$

Anmerkung: Die in (148)—(151) entwickelten Sätze gelten im allgemeinen nur für Vielflächner mit ausspringenden (konvexen) Ecken, die nicht ringförmig durchbrochen sind oder Höhlungen im Innern besitzen.

Nun haben die Dreiecke AOC und DOC zwei Seiten entsprechend gleich, die dritten Seiten jedoch ungleich, somit, da der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt

$$b > \sphericalangle DOC \quad \text{und somit auch} \quad b + c > \sphericalangle DOC + c$$

$$\text{d. h.} \quad b + c > a$$

Die Grenzen der Seitensumme.

155. Wendet man den vorhergehenden Satz auf das Nebendreikant des Dreikants O — ABC an, so folgt

$$a < (180 - b) + (180 - c)$$

woraus

$$a + b + c < 360$$

d. h. die Summe der Seiten eines Dreikants ist kleiner als 360°.

156. Schneidet man von einem n-Kant durch eine beliebige Ebene eine n-seitige Pyramide ab, so bildet die Summe S der Seiten des n-Kants mit der Summe S_1 sämtlicher Winkel an den Grundseiten der abgeschnittenen seitlichen Dreiecke die Gesamtwinkelsumme aller n seitlichen Dreiecke, also

$$S + S_1 = n \,.\, 2R$$

Nun ist aber an jeder der dreiseitigen Ecken, welche die Schnittebene mit dem n-Kant erzeugt, die Summe der beiden, in den seitlichen Dreiecken liegenden Seiten größer als die dritte der Schnittebene angehörende Seite, somit auch die Gesamtsumme der seitlichen Winkel S_1 größer als die Winkelsumme S_2 der Pyramidengrundfläche; somit

$$S + S_2 < n \,.\, 2R$$

und da

$$S_2 = (n - 2)\, 2R$$

so folgt

$$S + (n - 2)\, 2R < n \,.\, 2R$$

woraus

$$S < n \,.\, 2R - (n - 2) \,.\, 2R$$

oder

$$S < 4R$$

d. h. die Seitensumme eines beliebigen Vielkants ist kleiner als 360°.

157. Schneidet man daher irgend ein Vielkant nach einer Kante auf und klappt, nachdem die übrigen Kanten mit dem Messer geritzt sind, jede Seite in die Ebene der nächsten, bis alle Seiten in eine Ebene ausgebreitet sind, dann muß zwischen den beiden Strahlen, die aus der aufgeschnittenen Kante hervorgehen, ein Zwickel frei bleiben. Das Vielkant ist um so flacher, je kleiner, und um so spitzer, je größer dieser Zwickel ist, und die Anschauung ergiebt ohne weiteres,

daß das Vielkant in eine Ebene, das zugehörige sphärische Vieleck in einen Großkreis bezw. eine Halbkugelfläche ausartet, wenn die Seitensumme 360° beträgt, kein Zwickel also mehr übrig bleibt, und daß das Vielkant zu einer Geraden, das zugehörige sphärische Vieleck zu einem Punkt zusammenschrumpft, wenn die Seitensumme 0, der Zwickel also 360° beträgt; somit

$$0 < a + b + c + \ldots < 360^\circ$$ in Worten

Satz: Die Seitensumme eines Vielkants bezw. sphärischen Vielecks liegt zwischen 0° und 360°:

158. Für das sphärische Vieleck lassen sich diese Grenzen auch auf der Kugel selbst, ohne Zuhilfenahme des Vielkants feststellen. Läßt man die Seiten eines sphärischen Dreiecks mehr und mehr abnehmen unter Berücksichtigung von 154) — die Sätze 152—156 gelten auch für das sphärische Dreieck bezw. Vieleck —, so schrumpft das sphärische Dreieck im Grenzfall, daß jede seiner Seiten verschwindet, zum Punkt zusammen. Zerlegt man daher das sphärische Vieleck von einer Ecke aus in n — 2 Dreiecke oder von einem beliebigen Punkt innerhalb aus in n Dreiecke, so ist wie für jedes dieser Dreiecke, so auch für deren Summe, d. h. das Vieleck, die untere Grenze der Seitensumme 0.

Um die obere Grenze zu erhalten, vergleicht man die Seitensumme des Vielecks mit derjenigen des Dreiecks. Durch Verlängerung der beiden, durch Seite BC getrennten Seiten AB und CD bis zum Schnitt in Q geht das n-Eck in ein (n — 1)-Eck über, dessen Seitensumme diejenige des n-Ecks übertrifft, da im angefügten $\triangle BQC$ die überwachsene Seite $BC < BQ + QC$, die zuwachsenden Stücke. Setzt man dieses Verfahren fort, so wird mit abnehmender Seitenzahl die Seitensumme immer größer; schließlich erhält man ein Kugelzweieck, dessen Seitensumme 360° beträgt und somit größer ist als diejenige sämtlicher Vielecke, aus denen es entstanden ist.

Die pythagoräischen (platonischen) Körper.

159. Aus der Kenntnis der oberen Grenze der Seitensumme ergiebt sich die Zahl der regelmäßigen Vielflächner im engeren Sinn, der sogen. pythagoräischen oder platonischen Körper. Regelmäßig heißt die Stereometrie einen Vielflächner, dessen sämtliche Kanten, Vielecks- und Kantenwinkel, kurz dessen sämtliche gleichartigen Glieder, aus denen er aufgebaut ist, gleich sind. Es besteht also eine höhere Gleichgliedrigkeit, als bei den Körpern des regulären Krystallsystems. Sämtliche umgrenzenden Vielecke, desgleichen sämtliche körperlichen Ecken sind regelmäßig und kongruent.

Ist der Vielflächner umgrenzt von kongruenten

a) gleichseitigen Dreiecken, so können die Ecken sein

1. reguläre Dreikante, Seitensumme 3 . 60°:
   Das reguläre Tetraeder, eine reguläre dreiseitige Pyramide, auch reguläres Vierflach genannt, umgrenzt von 4 gleichseitigen Dreiecken, mit 4 Dreikanten und 6 Kanten.

2. reguläre Vierkante, Seitensumme 4 . 60°:

Das reguläre Oktaeder, eine reguläre vierseitige Doppelpyramide, auch reguläres Achtflach genannt, umgrenzt von 8 gleichseitigen Dreiecken, mit 6 Vierkanten und 12 Kanten.

3. reguläre Fünfkante, Seitensumme 5 . 60°:

Das reguläre Ikosaeder, auch reguläres Zwanzigflach, umgrenzt von 20 gleichseitigen Dreiecken mit 12 Fünfkanten und 30 Kanten.

reguläre Sechskante, Seitensumme 6 . 60° = 360°, unmöglich.

b) Quadrate, so können die Ecken sein

4. reguläre Dreikante: Seitensumme 3 . 90°:

Das reguläre Hexaeder, der Würfel oder reguläres Sechsflach, umgrenzt von 6 Quadraten mit 8 Dreikanten und 12 Kanten.

reguläre Vierkante, Seitensumme 4 . 90° = 360°, unmöglich.

c) reguläre Fünfecke, so können die Ecken sein

5. reguläre Dreikante, Seitensumme 3 . 105°:

Das reguläre Dodekaeder oder Zwölfflach, umgrenzt von 12 regulären Fünfecken mit 12 Fünfkanten und 30 Kanten.

reguläre Vierkante, Seitensumme 4 . 105°, unmöglich.

Aus dieser Untersuchung folgt somit der

Satz: Es giebt nicht mehr als fünf regelmäßige Vielflächner im engeren Sinn: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.

160. Von ihnen sind nur Tetraeder, Würfel und Oktaeder zugleich auch krystallographische Formen, Dodekaeder und Ikosaeder dagegen nicht, denn für sie ergiebt sich bei Zugrundelegung eines Achsenkreuzes ein irrationales Parameterverhältnis. Das stereometrische Dodekaeder mit durchaus gleichen Keilwinkeln ist daher wohl zu unterscheiden vom krystallographischen Pentagondodekaeder $\left[\frac{\infty \mathrm{O n}}{2}\right]$ mit ungleichen Keilwinkeln, ebenso das Ikosaeder von der ihm ähnlichen krystallographischen Kombination des Pentagondodekaeders und Oktaeders im Gleichgewicht. Das Messen der Keilwinkel mittels des Goniometers giebt sofort die Entscheidung.

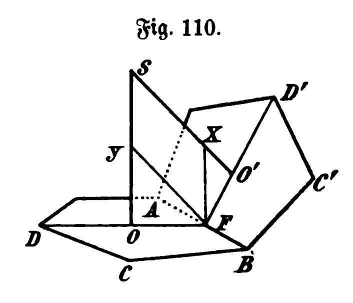
Aufmerksam sei gemacht auf die gleiche Kantenzahl, bagegen vertauschte Ecken- und Flächenzahl bei Würfel und Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Das Tetraeder hat Ecken und Flächen in gleicher Zahl.

Mittelpunkt und Achsenkreuz der pythagoräischen Körper.

161. Statt, wie in der Krystallographie von den Achsen ausgehend, die Gleichgliedrigkeit abzuleiten, ist hier unter Voraussetzung der Gleichgliedrigkeit der Nachweis eines Mittelpunkts und Achsenkreuzes zu führen. Errichtet man in den

Mittelpunkten O und O' zweier kongruenter, nach der Kante AB zusammenstoßender Vielecke die Lote auf letzteren, und verschiebt sie parallel nach FX und FY durch den gemeinschaftlichen Fußpunkt F der von O und O' auf AB gefällten Lote, so liegen FX, FY, OF, OF' als Mittellote zu AB in der Mittellotebene dieser Strecke. Die auf den beiden Vielecken errichteten Lote liegen somit auch in ihr, und schneiden sich daher in einem Punkte S. Diese Betrachtung von Vieleck zu Vieleck fortgesetzt, folgt:

Fig. 110.



Satz: Die in den Mittelpunkten der Vielecksflächen auf letzteren errichteten Lote gehen sämtlich durch einen einzigen Punkt S, den Mittelpunkt, im Innern des Vielflächners.

Die in den Mittelpunkten paralleler Flächen errichteten Lote fallen somit zusammen.

162. Aus $\triangle SOF \cong \triangle SO'F \ldots$ folgt $SO = SO' \ldots$
„ $\triangle SOB \cong \triangle SOC \cong \triangle SOC' \ldots$ „ $SB = SC = SC' = \ldots$
„ $\triangle SOF \cong \triangle SOG \ldots$ „ $SF = SG = \ldots$;
daher:

Satz: Der Mittelpunkt der regulären Vielflächner hat von allen Ecken, Kanten und Seitenflächen je gleiche Entfernung und ist daher Mittelpunkt dreier konzentrischer Kugeln: der umschriebenen Kugel durch die Ecken, der die Kanten in deren Mitten berührenden Kugel und der einbeschriebenen Kugel, welche die Seitenflächen in deren Mittelpunkten berührt.

163. Mit Hilfe der Kongruenz rechtwinkliger Scheiteldreiecke ergiebt sich, daß alle von der Oberfläche begrenzten, durch den Mittelpunkt gezogenen Strecken in diesem halbiert werden. Diejenigen dieser sogen. Durchmesser, welche Gegenecken, Vielecks- oder Kantenmittelpunkte verbinden, heißen Achsen; unter ihnen giebt es stets drei gleichgroße, zu einander senkrechte und gleichartige, d. h. entweder nur Ecken oder Kanten oder Flächen verbindende, die sogen. Hauptachsen, zugleich Symmetrieachsen der Vielflächner. Sie verbinden im Oktaeder die Gegenecken, im Tetraeder, Dodekaeder und Ikosaeder die Mitten von Gegenkanten, im Würfel die Mittelpunkte der Gegenflächen.

Das Oktaeder.

164. Gemäß den Eigenschaften der regulären Vielflächner sind die Dreikante A — BSD, B — CSA, C — DSB, D — ASC kongruent, und da je zwei derselben einen Kantenwinkel gemein haben, so folgt, daß die an diesen Kanten liegenden Ecken in einer Ebene liegen. ABCD ist daher ein ebenes Viereck mit lauter gleichen Seiten und Winkeln, d. h. ein Quadrat. Fällt man auf die Ebene desselben das Lot SO, so folgt aus

$$\triangle SOA \cong \triangle SOB \cong \triangle SOC \cong \triangle SOD$$

daß der Fußpunkt O Diagonalschnitt des Quadrats ist, und aus

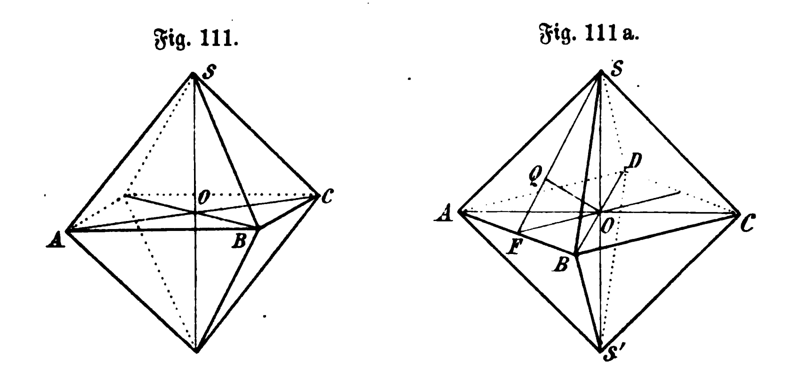
$$\triangle ABC \cong \triangle ASC \cong \triangle BSD,$$

daß $OB = OS$ d. h. O Mittelpunkt des Oktaeders und daß

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ASC = \sphericalangle BSD = 90^{\circ}$$

d. h. wird durch Verlängerung von SO um sich selbst bis S' die quadratische reguläre Pyramide S — ABCD zum Oktaeder ergänzt, so sind die Schnitte desselben mit den drei Hauptachsenebenen kongruente Quadrate mit der Kante k als Seite und die drei Hauptachsen sind zu je zweien Diagonalen dieser Quadrate.

Fig. 111. Fig. 111 a.



Zeichne daher, nach den früheren Regeln, das Quadrat ABCD in Parallelperspektive mit Neigung 60° und Verkürzung auf $\frac{1}{3}$ entweder so, daß zwei parallele Seiten querlaufend in wahrer Größe k erscheinen und die Diagonalen verkürzt sind, Fig. 111, oder so, daß eine Diagonale als Querachse in wahrer Größe $2a = \sqrt{2}\,.\,k$ erscheint, während die Seiten verkürzt sind, Fig. 111a. Trägt man auf der im Diagonalschnittpunkt errichteten, stets unverkürzten Vertikalachse beiderseits a ab und zieht von den Enden S und S' aus die Polkanten, so erhält man die am häufigsten abgebildeten, um 45° gegeneinander gedrehten Stellungen des Oktaeders.

Die Radien R, ϱ, r der umschriebenen, kantenberührenden und einbeschriebenen Kugel sind

$$R = a = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,k \qquad \varrho = OF = \frac{k}{2}$$

$r = OQ$ ist Kathete des rechtwinkligen $\triangle SQO$, das die Halbachse a zur Hypotenuse und $\frac{2}{3}$ der Höhe SF des gleichseitigen $\triangle ASB$ zur anderen Kathete hat; daher

$$r^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,k\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,k\right)^2 \quad \text{woraus } r = \frac{\sqrt{6}}{6}\,.\,k$$

Zeichne r als mittlere Proportionale mittels $r^2 = k\,.\,\frac{k}{6}$.

Das Hexaeder.

165. Die Hauptachsen, welche die Mittelpunkte der drei Paare paralleler Gegenflächen verbinden, laufen den drei zu einander senkrechten Parallelenscharen von je vier Würfelkanten parallel und sind daher je gleich der Würfelkante k. Die von einer Ecke der Grundfläche aus gezogene Würfeldiagonale D bildet mit der durch dieselbe Ecke gehenden Diagonalen d der Grundfläche und der die Endpunkte von D und d verbindenden Würfelkante k ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem (Fig. 113)

$$D^2 = d^2 + k^2 \qquad \text{aber} \qquad d^2 = k^2 + k^2$$

somit

$$D^2 = 3k^2 \qquad \text{woraus} \qquad D = \sqrt{3}\,.\,k$$

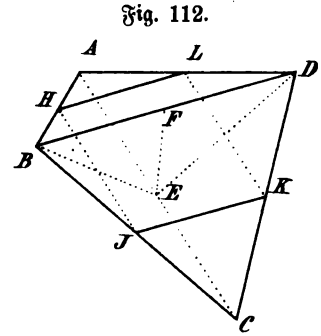
und daher

$$R = \frac{1}{2} D = \frac{\sqrt{3}}{2} k, \qquad r = \frac{k}{2}, \qquad \varrho = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,k$$

Das Tetraeder.

166. Die Ebene durch die Endpunkte A, B, C der Kanten einer, von drei gleichseitigen Dreiecken gebildeten körperlichen Ecke D erzeugt an diesen Enden drei unter sich und mit D kongruente, gleichseitige Ecken und umgrenzt sonach mit der Ecke D einen durchaus gleichgliedrigen Vielflächner, das Tetraeder. Verbindet man die Mitte E einer Kante AC mit den Endpunkten der Gegenkante BD, so ist als Höhe im gleichseitigen Dreieck

Fig. 112.



$$BE \perp AC \qquad \text{und} \qquad DE \perp AC$$

daher

$$(BED) \perp AC \qquad \text{„} \qquad BD \perp AC$$

d. h.

Satz: Die Gegenkanten des Tetraeders stehen senkrecht zu einander.

167. Da unter den Gliedern des Tetraeders nur die Kanten in der Zahl 6 vorkommen, so ist zu vermuten, daß die Hauptachsen die Mitten der drei Paare Gegenkanten verbinden. Nun ist in dem von zwei Paar Gegenseiten gebildeten windschiefen Viereck AB — CD

$$HJ \parallel LK \parallel AC \qquad \text{desgleichen} \qquad HL \parallel JK \parallel BD$$

die Mitten H, J, K, L der Gegenseiten dieses windschiefen Vierecks liegen daher in einer Ebene und sind die Ecken eines Parallelogramms. Da aber

$$HJ = LK = \frac{1}{2}\,AC \qquad \text{desgleichen} \qquad HL = JK = \frac{1}{2}\,BD$$

ferner

$$AC = BD \text{ und } AC \perp BD$$

so ist HJKL sogar ein Quadrat. Dehnt man diese Betrachtung auf die windschiefen Vierecke AB — DC und AC — BD aus — je zwei der drei Paar Gegenkanten des Tetraeders können als Gegenseiten eines windschiefen Vierecks betrachtet werden, — so zeigt sich, daß die drei Verbindungsgeraden der Mitten der Gegenkanten des Tetraeders zu je zweien, Diagonalen der drei Quadrate sind, die von den Mitten je zweier Paare Gegenkanten gebildet werden. Daraus folgt

Satz: Die drei Verbindungsstrecken der Mitten der Gegenkanten eines regulären Tetraeders sind gleich lang, halbieren sich gegenseitig und stehen aufeinander senkrecht.

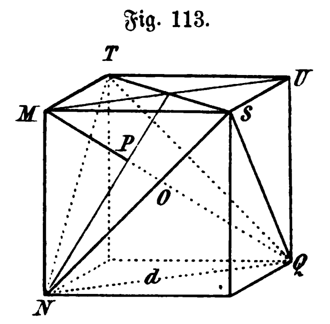
Sie sind daher als die Hauptachsen des Tetraeders zu betrachten.

168. Da BE = ED als Höhen kongruenter gleichseitiger Dreiecke, so ist △ BED gleichschenklig. Verbindet man daher E mit der Mitte F von BD, so folgt EF ⊥ BD, aber auch EF ⊥ AC, da (BED) ⊥ AC, somit

Satz: Die Hauptachsen sind die kürzesten Entfernungen der Gegenkanten des Tetraeders.

169. Legt man daher durch jedes Paar Gegenkanten die Parallelebenen, so erzeugen diese einen Würfel, in welchem die Tetraederkanten als die zwischen den abwechselnden Würfelecken gezogenen Diagonalen der Seitenflächen erscheinen. Da die Achse des Tetraeders zugleich Achse des dem Tetraeder umschriebenen Würfels ist, so geht man am besten von diesem Würfel aus, um das Tetraeder in der üblichen Achsenstellung zu zeichnen. Auch zur Ermittelung des Rauminhalts des Tetraeders kann der Würfel benützt werden: Man hat von ihm vier kongruente dreiseitige Pyramiden abzuziehen, welche die Hälfte einer Würfelfläche zur Grundfläche und die Würfelkante zur Höhe haben.

Fig. 113.



Die Achse des Tetraeders bezw. seines umschriebenen Würfels ist die Seite eines Quadrats, dessen Diagonale die Tetraederkante k ist.

Erinnert sei noch an $\frac{O}{2} \cdot \infty O \infty$ und $\infty O \infty \cdot \frac{O}{2}$, siehe 119).

170. Die Würfeldiagonale MQ, welche die gegenüberliegende Tetraederfläche NTS in P treffen möge, bildet, da

$$\triangle MNQ \cong \triangle MSQ \cong \triangle MTQ$$

mit den Kanten der Würfelecke M gleiche Winkel, daher ist auch

$$\triangle MPN \cong \triangle MPS \cong \triangle MPT$$

somit

$$PN = PS = PT$$

und

$$\sphericalangle MPN = \sphericalangle MPS = \sphericalangle MPT = 90^\circ$$

d. h.

Das Stück QP der Würfeldiagonale ist die von der Ecke Q auf die gegenüberliegende Fläche NST gefällte Höhe des Tetraeders. Der Fußpunkt der Höhe ist der Mittelpunkt oder Schwerpunkt der Tetraederfläche. Diese Betrachtung gilt für alle vier Würfeldiagonalen, somit

Satz: Die Höhen des Tetraeders schneiden sich im Achsenkreuzmittelpunkt, dem sogen. Schwerpunkt.

171. Aus $\triangle MPN \sim \triangle MNQ$ folgt (Fig. 113)

$$\frac{MP}{MN} = \frac{MN}{MQ} = \frac{MN}{\sqrt{3}\,MN}$$

woraus

$$MP = \frac{MN}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\,MN = \frac{1}{3}\,MQ$$

daher

$$QP = \frac{2}{3}\,MQ$$

d. h. die Tetraederhöhe beträgt $\frac{2}{3}$ der Diagonale des umschriebenen Würfels, somit, da die Würfeldiagonalen gleich sind,

Satz: Die Höhen eines regulären Tetraeders sind gleich.

Der Schnittpunkt O der Würfeldiagonalen MQ und UN ist Achsenkreuzmittelpunkt (Fig. 113), also

$$MQ = 2\,MO,$$

daher gemäß oben

$$MP = \frac{2}{3}\,MO$$

und

$$OP = \frac{1}{3}\,OM = \frac{1}{3}\,OQ = \frac{1}{4}\,PQ$$

d. h.

Satz: Der Schwerpunkt des Tetraeders teilt die Höhen im Verhältnis 1 : 3, so daß der größere Abschnitt der Ecke zu liegt.

172. Beweis der Sätze 170) und 171) ohne Benützung des Würfels:

Fälle $AE \perp (BCD)$, so ist

$$\triangle AEB \cong \triangle AEC \cong \triangle AED$$

daher

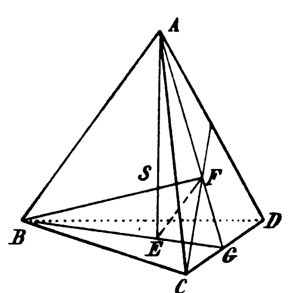
$$EB = EC = ED$$

d. h.

E ist der Schwerpunkt des $\triangle BCD$. Die Fußpunkte der Höhen sind somit die Schwerpunkte der Tetraederflächen.

Ebene (BAE) schneidet somit (BCD) und (CDA) nach den Schwerlinien BG und AG. Da aber die Höhe von B die Gegenfläche im Schwerpunkt F trifft, so liegt BF in (ABE) und schneidet daher AE in einem Punkt S.

Fig. 114.



Nun verhält sich

$$\frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GA}$$

daher $EF \parallel AB$ und

somit $$\frac{SE}{SA} = \frac{EF}{AB} = \frac{GE}{GB} = \frac{1}{3}$$

d. h. je zwei Höhen schneiden sich im Verhältnis 1 : 3, somit schneiden sich alle in einem einzigen Punkt S nach diesem Verhältnis.

Die Gleichheit der Höhen folgt aus $\triangle AEB \cong \triangle BFA$ u. s. f.

173. Aus Fig. 113 folgt, wenn k und 2a die Kanten eines Tetraeders und seines umschriebenen Würfels sind:

$$NS = \sqrt{2} . MN \qquad \text{oder} \qquad k = \sqrt{2} . 2a$$

woraus $$2a = \frac{\sqrt{2}}{2} k$$

Tetraederhöhe $$h = \frac{2}{3} MQ = \frac{2}{3} . \sqrt{3} . 2a = \frac{\sqrt{6}}{3} k$$

ferner $$r = \frac{1}{3} OQ = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} a = \frac{\sqrt{6}}{12} k$$

oder auch $$= \frac{1}{4} h = \frac{\sqrt{6}}{12} k$$

und $$R = OQ = \sqrt{3} a = \frac{\sqrt{6}}{4} k$$

oder $$R = \frac{3}{4} h = \frac{\sqrt{6}}{4} k$$

endlich $$\varrho = \frac{1}{2} MN = a = \frac{\sqrt{2}}{4} k$$

Aus Fig. 114 würde sich h berechnen, mittels der Dreiecke AEB oder AEG; im ersteren wäre

$$h^2 = AB^2 - BE^2 = k^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{k}{2} \sqrt{3}\right)^2 = \frac{2}{3} k^2 \text{ u. s. f.}$$

Das Dodekaeder.

174. Fig. 115: Die Achsen verbinden die Mitten dreier Paare paralleler Kanten oder Fünfeckseiten k und sind diesen parallel. Ihre Größe 2a berechnet sich aus k mittels eines ebenen Schnitts durch zwei der Achsen, der ein zu letzteren

symmetrisches Sechseck liefert, in welchem $AB \parallel OD$ Fünfeckseiten, $AE \parallel DF$ und $BF \parallel EC$ die Höhe h der regulären Fünfeckseitenflächen des Dodekaeders darstellen. Ziehe $BG \parallel OS$, dann ist in dem rechtwinkligen $\triangle BGF$

$$BG^2 + FG^2 = BF^2 = BH^2 - FH^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Die Zeichnung des regulären Fünfecks aus der Kante k giebt:

$$HQ^2 = NH(NH - QH)$$

oder

$$k^2 = d(d - k)$$

woraus

$$BH = d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} . k \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Durch Einsetzen von 2) in 1) folgt

$$a^2 + \left(a - \frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

woraus

$$a = \frac{1 + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}{4} k = \frac{1 + 2 + \sqrt{5}}{4} k$$

gemäß 175) und

$$2a = \frac{1 + \sqrt{5} + 2}{2} \qquad k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} k + k$$

d. h.

$$2a = d + k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

somit

Satz: Die Hauptachse ist gleich der Summe der Diagonale und Seite der regulären Fünfeckseitenfläche.

175. Die Umformung von $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ geschieht nach dem Verfahren, eine Wurzelgröße von der Form $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ in die Summe zweier Wurzeln zu zerlegen. Es sei

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

so folgt quadriert

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

daher

$$x + y = a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{b} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

hieraus, nach dem üblichen Verfahren

$$(x + y)^2 = a^2$$
$$4xy = b$$
$$\overline{(x - y)^2 = a^2 - b}$$
$$x - y = \sqrt{a^2 - b} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

Aus 1) und 3)

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - b}\right) \qquad y = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)$$

In unserem Fall ist $a = 9$, $b = 16 . 5$ und somit

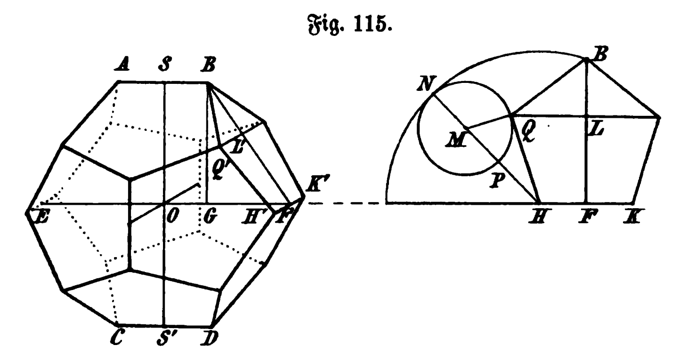
$$x = \frac{1}{2}\left(9 + \sqrt{81 - 80}\right) = 5 \qquad y = \frac{1}{2}\left(9 - \sqrt{81 - 80}\right) = 4$$

daher

$$\sqrt{9 + \sqrt{80}} = \sqrt{5} + 2$$

176. Zeichnung des Dodekaeders: Durch stetige Verlängerung der geg. Kante k ergiebt sich die Diagonale des regulären Fünfecks und hieraus gemäß 174) die Achse 2a des Dodekaeders. Ziehe in den Endpunkten des in Parallelperspektive gezeichneten Achsenkreuzes — zwei senkrechte gleichgroße Achsen in der Zeichnungsebene, Fig. 115, die dritte mit Neigung 30° und Verkürzung $\frac{1}{3}$,

Fig. 115.



siehe 111) — die drei Paare den Achsen paralleler Kanten und ermittle mit Hilfe der Nebenzeichnung in jeder der durch die Endpunkte letzterer bestimmten Dodekaederflächen die beiden fehlenden Ecken nach den Sätzen der Parallelperspektive über die Proportionalität und Parallelität von Strecken. Gegenecken bestimmt man mit Hilfe von Durchmessern.

Ecke Q' ergiebt sich z. B. aus

$$BL' = BL \quad \text{und} \quad Q'L' : QL = H'F : HF = (1 : 3)$$

177. Die Radien der drei Kugeln ergeben sich zu

$$\varrho = a \quad = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}\, k$$

$$R = OB = \sqrt{a^2 + \frac{k^2}{4}} = \frac{\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}{4}\, k = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, k$$

und mit Hilfe des Halbmessers ϱ' des Inkreises des regulären Fünfecks

$$\varrho' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\, k$$

ergiebt sich

$$r = \sqrt{a^2 - \varrho'^2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^2 k^2 - \frac{5+2\sqrt{5}}{20} k^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, k$$

Das Ikosaeder.

178. Die Lagenverhältnisse der Achsen sind dieselben wie beim Dodekaeder. Jeder Hauptachsenschnitt liefert ein zu diesen Achsen symmetrisches Sechseck, in welchem AB # CD die Kante k, BF # EC und AE # FD die Höhe h der regulären Dreieckseitenflächen ist. Zieht man daher wieder BG || SS', so ist im rechtwinkligen △ BGF

Fig. 116.

$$a^2 + \left(a - \frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k\right)^2 = h^2$$

woraus

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{4} k$$

oder

$$2a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} k = d$$

d. h.

Satz: Die Hauptachse ist die Diagonale eines regulären Fünfecks von der Kante k.

Dieses Ergebnis folgt auch unmittelbar daraus, daß jede der von fünf gleichseitigen Dreiecken gebildeten Ecken, als Pyramide betrachtet, ein reguläres Fünfeck von der Kante k zur Grundfläche hat, in welchem je eine Diagonale einer Hauptachse parallel und gleich ist.

Durch Verbindung der zwölf Ecken, welche man erhält, wenn man nach Zeichnung des Achsenkreuzes durch die Endpunkte der Achsen als Kantenmitten die drei Paare den Achsen paralleler Kanten zieht, entstehen die fehlenden Kanten des Ikosaeders. Fig. 116: $OK = \frac{1}{3} OS$, $UV = AB$, $PW = \frac{1}{3} AB$.

179. Die Radien der drei Kugeln ergeben sich zu

$$\varrho = a = \frac{1+\sqrt{5}}{4} k$$

$$R = OB = \sqrt{a^2 + \frac{k^2}{4}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}\, k$$

$$r = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} k\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{3}}\, k = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} k$$

oder

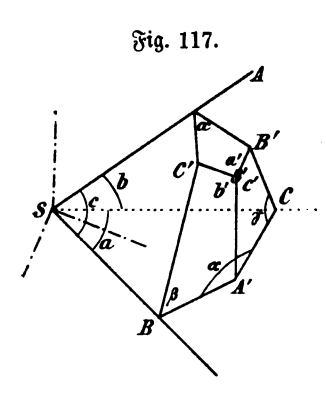
$$r = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} k$$

Polardreikant.

180. Zu jedem Dreikant bezw. sphärischen Dreieck giebt es ein ihm zugeordnetes sogen. Polar- oder Supplementärdreikant bezw. -dreieck, dessen Seiten und Winkel mit denen des ersten in enger Wechselbeziehung stehen, das daher bei vielen Aufgaben ein wichtiges Hilfsmittel bietet.

Das im Mittelpunkt auf der Aequatorebene errichtete Lot trifft bekanntlich die Kugeloberfläche in den beiden Polen. Betrachtet man demnach die Seitenflächen des Dreikants als Aequatorebenen, so bestimmen die zu ihnen im Scheitel errichteten Senkrechten auf der jeweiligen Kugelhälfte, nach welcher hin das Dreikant bezw. sphärische Dreieck liegt, die Ecken des Polardreiecks und sind selbst die Kanten des Polardreikants. In ihrer Rückverlängerung bilden sie die Kanten des Polargegendreikants und treffen die Kugel in den Ecken des Polargegendreiecks.

Fig. 117.



181. Da jedes Dreikant ausschließlich von Winkelgrößen abhängt, so bleiben die Beziehungen zwischen Dreikant und Polardreikant ungeändert, wenn letzteres parallel verschoben, die zuvor gemeinschaftliche Spitze S nunmehr für das Polardreikant in einen Punkt S' innerhalb (warum?) des Winkelraums S verlegt wird. Die von S' auf die Seitenflächen von S gefällten Lote sind alsdann die Kanten des Polardreikants und schließen die Seiten a', b', c' desselben ein; daher folgt,

weil $SB \perp S'A'$, $SB \perp S'C'$ u. s. f.,

daß $SB \perp b'$, $SC \perp c'$, $SA \perp a'$,

d. h. $S - ABC$ Polardreikant zu $S' - A'B'C'$,

somit

Satz: Ist ein Dreikant Polardreikant eines anderen, so ist auch das letztere Polardreikant des ersteren.

182. Hieraus folgt, daß die Seitenflächen eines Dreikants die Keilwinkel seines Polardreikants ausschneiden, und da die Kanten einer Seite auf den Schenkeln des von dieser Seite ausgeschnittenen Keilwinkels des Polardreikants senkrecht stehen, z. B. $S'A' \perp A'B$ und $S'C' \perp C'B$, so ergiebt sich

1. wenn S' als Dreikant und S als Polardreikant betrachtet wird, aus den Kreisvierecken S'C'AB', S'A'BC', S'B'CA' mit den Durchmessern S'A, S'B, S'C, daß

$$\alpha + a' = 180^\circ \qquad \beta + b' = 180^\circ \qquad \gamma + c' = 180^\circ$$

2. wenn S als Dreikant und S' als Polardreikant betrachtet wird, aus den Kreisvierecken SCA'B, SAB'C, SBC'A daß

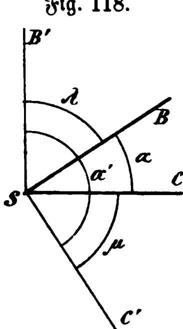
$$a + \alpha' = 180^\circ \qquad b + \beta' = 180^\circ \qquad c + \gamma' = 180^\circ$$

daher

Satz: Entsprechende Seiten und Winkel eines Dreikants und seines Polardreikants ergänzen sich zu zwei Rechten.

183. Diese Beziehungen ergeben sich auch ohne Parallelverschiebung des einen Dreikants. Wähle die zur Kante SA senkrechte Keilwinkelebene α zur Zeichnungsebene, dann sind, da SB und SC die Seitenflächen c und b darstellen, $SB' \perp SC$ und $SC' \perp SB$ die beiden Polkanten, welche die Seite a' des Polardreikants einschließen. Nun ist

Fig. 118.



$$\alpha + \lambda = \alpha + \mu \quad \text{woraus} \quad \lambda = \mu$$

und da

$$a' - \lambda = 90$$
$$\alpha + \mu = 90$$

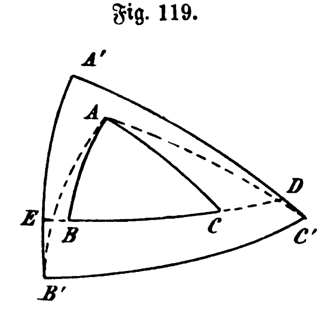
so folgt

$$a' + \alpha = 180 \quad \text{u. s. f.}$$

Dieselben Sätze gelten für sphärisches Dreieck und Polardreieck, sobald um die Spitzen der Dreikante Kugeln beschrieben werden.

184. Ableitung der Beziehungen zwischen sphärischem Dreieck und Polardreieck auf der Kugelfläche selbst:

Fig. 119.



A', B', C' seien die Pole der Dreieckseiten BC, CA, AB. Ziehe die Großkreisbögen AB' und AC' (wo ist auf der Kugelfläche die Zirkelspitze einzusetzen?), dann ist

Bogen AB' = 90° weil B' Pol von AC
Bogen AC' = 90° weil C' Pol von AB

daher hat A von zwei Punkten der Großkreisebene B'C' die Entfernung 90° oder, wenn S der Kugelmittelpunkt, $AS \perp SB'$ und $AS \perp SC'$, daher $AS \perp (BSC')$, d. h. A Pol von B'C' u. s. f.

$\sphericalangle$ A' werde gemessen durch den zugehörigen Aequatorbogen ED, dann ist

$$CE = CB + BE = 90^\circ \quad \text{weil C Pol von A'B'}$$
$$BD = BC + CD = 90^\circ \quad \text{weil B Pol von A'C' somit}$$
$$(BC + BE + CD) + BC = 180^\circ$$

oder

$$DE + BC = 180^\circ \quad \text{oder} \quad \alpha' + a = 180^\circ \quad \text{u. s. f.,}$$

d. h. entsprechende Winkelbogen des Polardreiecks und Bogenseiten des ursprünglichen Dreiecks ergänzen sich zum Halbkreis u. s. f.

185. Folgerungen: Da Winkel und Seiten des Dreikants bezw. Kugeldreiecks und seines Polargebildes in gewissem Sinn vertauscht sind, so wandeln sich, durch Anwendung auf das Polargebilde, Beziehungen

zwischen	um in solche zwischen
drei Seiten	drei Winkeln
zwei Seiten und einem Winkel	zwei Winkeln und einer Seite
einer Seite und zwei Winkeln	einem Winkel und zwei Seiten
drei Winkeln	drei Seiten

des ursprünglichen Gebildes; z. B.:

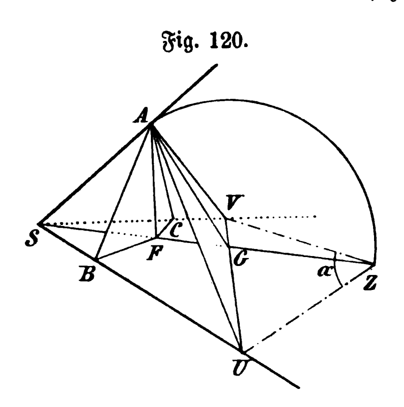
1. Gemäß 144) ist
$$\alpha + \beta + \gamma > 180$$
also auch im Polardreikant die Summe der Winkel
$$(180 - a) + (180 - b) + (180 - c) > 180$$
woraus $a + b + c < 360$

2. Gemäß 154) ist $a < b + c$
daher auch im Polardreikant $(180 - \alpha) < (180 - \beta) + (180 - \gamma)$
woraus $\beta + \gamma - \alpha < 180$
d. h. der Ueberschuß der Summe zweier Winkel über den dritten ist kleiner als zwei Rechte u. s. f.

Das Dreikantsnetz.

186. Um die Winkel des Dreikants S — ABC zu messen, zeichne man die Keilwinkelebenen. Am zweckmäßigsten fälle man von einem beliebigen Punkt A der Kante SA das Lot AF ⊥ a, ziehe FB ⊥ SB und FC ⊥ SC, so ist auch AB ⊥ SB und AC ⊥ SC, d. h. ∢ ABF $= \beta$ und ∢ ACF $= \gamma$. Die in A auf SA in b und c errichteten Lote AV und AU schließen ∢ UAV $= \alpha$ ein. Schneidet man das Dreikant nach der Kante SA auf und klappt die Dreiecke AFB, AFC, ABS, ACS, UAV um ihre in a liegenden Seiten in die Seitenfläche a, so entsteht das ebene Netz des Dreikants, das sämtliche Seiten und Winkel in wahrer Größe enthält.

Fig. 120.

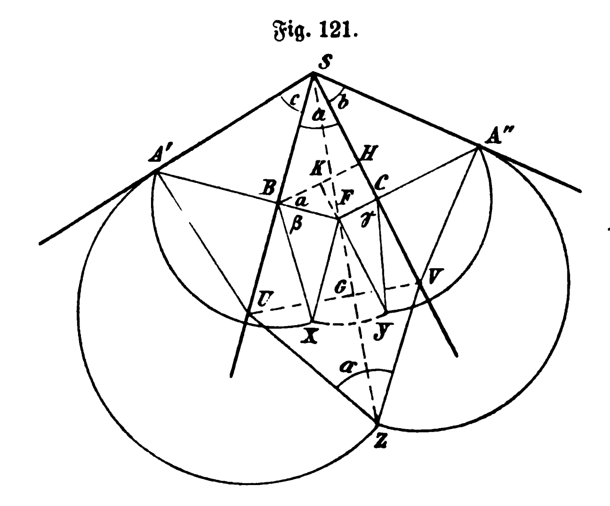


Die nicht unabhängige Lage der Hilfsdreiecke ergiebt eine Reihe von Beziehungen. Die Lote AB und AC fallen umgeklappt in die Verlängerungen BA′ und CA″ von FB und FC, Kante SA teilt sich in SA′ und SA″, ebenso AB in AB′ = BX und AC in A″C = CY, sowie AF in FX = FY. Da ferner

	$UV \perp AF$,	denn	$AF \perp a$
und	$UV \perp SA$,	denn	$SA \perp (UAV)$
so folgt	$UV \perp (ASF)$ und somit $UV \perp SF$.		

Kommt daher Δ UAV durch Drehung um UV in die Lage UZV, so liegen die drei Punkte S, F, Z in einer zu UV senkrechten Geraden. Zeichenprobe!

Fig. 121.



Aus dem Netz erhält man umgekehrt das Dreikant, dadurch daß man die Seiten b und c um SC und SB dreht, bis SA' und SA'' sich zu der dritten Kante SA bezw. SA_1 vereinigen. Es entstehen zwei zur Ebene der Seite a symmetrische kongruente Dreikante; das Dreikant ist somit durch die drei Seiten eindeutig bestimmt. Ganz allgemein folgt daher

Satz: Unter der Voraussetzung

	$o < a + b + c < 180°$	und	$180 < \alpha + \beta + \gamma < 540°$
sowie	$a < b + c$	und	$\alpha + \beta - \gamma < 180°$
	u. s. f.		u. s. f. . . . .

genügen drei beliebige Bestimmungsstücke des Dreikants zur Ermittelung der übrigen.

Algebraische Beziehungen.

187. Der geometrischen Zeichnung des Dreikants aus drei geg. Stücken entspricht die algebraische Berechnung der gesuchten Größen, beruhend auf drei trigonometrischen Hauptsätzen, die sich aus Fig. 121, wie folgt, ergeben: Wählt man $SA' = SA'' = 1$, so ist

$$A'B = \sin c = XB \quad \text{und} \quad A''C = \sin b = YC$$

und die Beziehung $FX = FY$ verwandelt sich in

$$XB \,.\, \sin\beta = YC \,.\, \sin\gamma$$

oder
$$\sin c \,.\, \sin \beta = \sin b \,.\, \sin \gamma$$
oder
$$\sin b : \sin c = \sin \beta : \sin \gamma$$

Wird das Dreikant nach der Kante SB aufgeschnitten und in b zum Netz ausgebreitet, so folgt
$$\sin a : \sin c = \sin \alpha : \sin \gamma$$
somit
$$\mathbf{\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$
oder
$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$
somit

Sinussatz: Die Sinusse der Seiten verhalten sich wie die Sinusse der Gegenwinkel.

Vergleiche hiermit die Beziehung beim ebenen Dreieck
$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$
oder
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

188. Verlängert man YF bis zum Schnitt K mit $BH \perp SC$, so ist $\sphericalangle KBF = a$ und
$$SC = SH + HC \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$
nun ist aber
$$\begin{aligned} SC &= \cos b \\ SH &= SB \cos a = \cos c \,.\, \cos a \\ HC &= FK \qquad = BF \,.\, \sin a \\ &= BX \cos \beta \,.\, \sin a \\ &= \sin c \cos \beta \,.\, \sin a \end{aligned}$$
daher, diese Werte in 1) eingesetzt und die Berechnung ähnlich für die Seiten c und a durchgeführt, im letzteren Fall das Dreikant nach SB oder SC aufgeschnitten, folgt

Der Seitencosinussatz:
$$\begin{aligned} \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \\ \mathbf{\cos a} &\mathbf{= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha} \end{aligned}$$
welcher die Beziehungen zwischen den drei Seiten und je einem Winkel ausdrückt.

Vergleiche hiermit die zwischen den Seiten und einem Winkel des ebenen Dreiecks bestehende Beziehung
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{u. s. f.}$$

189. Auf das Polardreikant angewendet, giebt dieser Satz:
$$\cos (180 - \alpha) = \cos (180 - \beta) \cos (180 - \gamma) + \sin (180 - \beta) \sin (180 - \gamma) \cos (180 - a)$$

oder

$$-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos a$$

Dies ist der Winkelcosinussatz:

$$\mathbf{\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a}$$
$$\cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos b$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$$

welcher die Beziehungen zwischen den drei Winkeln und je einer Seite ausdrückt.

Die sechs Dreikantszeichnungen.

190. Erster Fall. Dreikant aus a, b, c.

Lege die drei Seiten in der Zeichnungsebene mit gemeinschaftlicher Spitze so aneinander, daß zwei derselben mit der dritten je einen Schenkel gemein haben. Fälle von den Endpunkten A′ und A″ der freien Schenkel SA′ = SA″ auf den jeweiligen gemeinschaftlichen Schenkel der Seite a die Lote A′B und A″C bis zum Schnitt in F. Die um B mit BA′ und um C mit CA″ beschriebenen Kreise treffen die, durch F zu den Schenkeln von a gezogenen Parallelen in X und Y und bestimmen die Winkel $\sphericalangle$ FBX = β und $\sphericalangle$ FCY = γ. Zeichenprobe FX = FY. Errichte A′U $\perp$ SA′ und A″V $\perp$ SA″. Die Kreise um U mit UA′ und um V mit VA″ geben Punkt Z und damit $\sphericalangle$ UZV = α. Zeichenprobe SFZ eine Gerade, senkrecht zu UV. Fig. 121.

191. Zweiter Fall. Dreikant aus α, β, γ.

Zeichne in der oben beschriebenen Weise das Polardreikant aus den Seiten

$$a' = 180 - \alpha,\ b' = 180 - \beta,\ c' = 180 - \gamma,$$

dann sind die Supplemente zu den gefundenen Winkeln α', β', γ' des Polardreikants die gesuchten Seiten a, b, c.

192. Dritter Fall. Dreikant aus b, c, α.

Für diesen Fall ist es zweckmäßig, das Dreikant nach SB aufzuschneiden und das Netz in der Seitenfläche b zu zeichnen. Lege daher in der Zeichnungsebene die Seiten b und c mit gemeinschaftlicher Spitze S und einem gemeinschaftlichen Schenkel SA aneinander. Fälle von einem beliebigen Punkt B′ des freien Schenkels von c das Lot B′A $\perp$ SA und trage an die Verlängerung desselben im Fußpunkt A, nach der Seite der sich erweiternden Seitenfläche b, den $\sphericalangle$ α an, dessen freier Schenkel vom Kreis um A mit AB′ in X getroffen werde. Fälle XF $\perp$ B′A und FC $\perp$ SC, den freien Schenkel von b. Der Endpunkt Y der zu SC Parallelen FY = FX bestimmt $\sphericalangle$ FCY = γ und der Kreis um C mit CY giebt auf der verlängerten FC Punkt B″ und somit $\sphericalangle$ B″SC = a. Die Lote B′U $\perp$ SB′ und B″V $\perp$ SB″ und die Kreise um U mit UB′ und um V mit VB″ bestimmen $\sphericalangle$ UZV = β.

193. Vierter Fall. Dreikant aus β, γ, a.

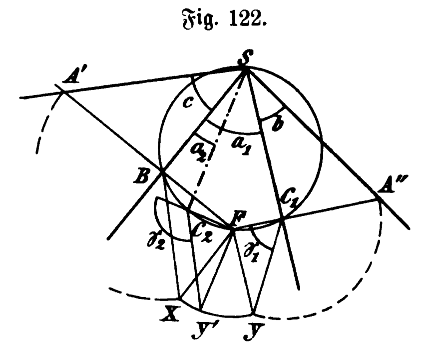
Mittels des Polardreikants aus den Seiten b′ = 180 − β, c′ = 180 − γ und dem Winkel α' = 180 − a zurückgeführt auf Fall 3.

Anderenfalls sei a Zeichnungsebene. Das Lot $D_1 G_1 \perp B_1 C_1$ in dem aus β und γ, den Winkeln an der Grundseite $B_1 C_1$, gezeichneten Hilfsdreieck $B_1 D_1 C_1$ teilt letzteres in zwei den Dreiecken BFX und CFY ähnliche Dreiecke. Diese sind mittels der zu den Schenkeln der Seite a in den Abständen $G_1 B_1$ und $G_1 C_1$ gezogenen Parallelen, die sich in F treffen, in ihre besondere Lage bezüglich a zu verschieben, dann bestimmen die Kreise um B mit BX und um C mit CY auf den Verlängerungen von FB und FC die Punkte A' und A'' und damit die Seiten $BSA' = b$ und $CSA'' = c$ u. s. f. Zeichenprobe $SA' = SA''$ u. s. f.

194. Fünfter Fall. Dreikant aus b, c, β.

Fälle von einem beliebigen Punkt A' des einen Schenkels der Seite c auf den anderen das Lot A'B, trage im Fußpunkt an die Verlängerung desselben $\sphericalangle \beta$, der Spitze des Dreikants abgewandt, an und fälle vom Endpunkt des freien Schenkels $BX = BA'$ das Lot $XF \perp A'B$. Lege die Kathete SC, welche sich aus dem durch $\sphericalangle$ b und SA' als Hypotenuse bestimmten, zunächst in beliebiger Lage gezeichneten Hilfsdreieck SCA'' ergiebt, als Sehne in den über SF als Durchmesser beschriebenen Kreis, dann ist $\sphericalangle CSB = a$. Die zu SC Parallele $FY = FX$ bestimmt $\sphericalangle FCY = \gamma$ u. s. f. Im allgemeinen schneidet der Kreis um S mit SC denjenigen über SF in zwei Punkten, daher zwei Lösungen. Probe mit SFZ!

Fig. 122.



Bedingung für die Möglichkeit der Lösung ist $SC < SF$. Trigonometrisch:

$$SC^2 < SF^2 \text{ oder}$$

$$SC^2 < SB^2 + BF^2$$

oder

$$\cos^2 b < \cos^2 c + \sin^2 c \cos^2 \beta$$
$$< \cos^2 c + \sin^2 c\,(1 - \sin^2 \beta)$$

oder

$$\sin^2 c \sin^2 \beta < 1 - \cos^2 b$$

oder

$$\sin^2 c \sin^2 \beta < \sin^2 b \quad \text{d. h.} \quad \sin c \sin \beta < \sin b.$$

195. Sechster Fall. Dreikant aus β, γ, b.

Fig. 122 wegen, sei der gleichwertige Fall behandelt: Dreikant aus β, γ, c. Die Lösung ist mittels des Polardreikants auf Fall 5 zurückgeführt.

Auch für die unmittelbare Lösung bleibt das Verfahren bis zur Bestimmung des Punktes F, dann aber ist die Kathete FC, welche sich aus einem durch $\sphericalangle \gamma$ und Hypotenuse FX bestimmten rechtwinkligen Hilfsdreieck ergiebt, als Sehne in den über FS beschriebenen Kreis zu legen. Dadurch ist die Lage des $\triangle$ CFY bestimmt u. s. f. Da die Sehne FC von F aus zweimal in den Kreis über SF gelegt werden kann, so giebt es im allgemeinen zwei Lösungen. Bedingung?

196. Bei vorstehenden sechs Dreikantszeichnungen fällt Fußpunkt F in die dem Dreikant selbst angehörige Seitenfläche a nur dann, wenn jede der vier Größen b, c, β, $\gamma < 90$.

Ist eine dieser Größen $\gtreqless 90$, so fällt F auf einen der Schenkel der Seite a bezw. in die Neben- oder Scheitelwinkelfläche dieser Seite, aber die Zeichnung bleibt dieselbe, wie aus Fall 5 in 194) ersichtlich. Nur ist für

$$b > 90 : \sphericalangle FBX = 180 - \beta \text{ und für } c > 90 : \sphericalangle FCY = 180 - \gamma.$$

Sind mehr als eines der geg. Stücke stumpf:

Eine Seite und ein an- oder gegenüberliegender Winkel, so zeichne man das Netz in der geg. Seitenfläche.

Eine Seite und zwei anliegende Winkel, so zeichne man das zur Seite gehörige Nebendreikant.

Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel: zeichne das Scheiteldreikant.

Zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen: zeichne das Nebendreikant.

Alle drei Seiten: zeichne das Scheiteldreikant.

197. Die Zeichnung von Dreikanten aus Höhen, Transversalen, Winkelhalbierenden u. s. f. führt, ähnlich dem Verfahren der ebenen Geometrie, zunächst zur Lösung von Hilfs- oder Teildreikanten; so erfordert z. B. Dreikant aus a, h, β die Zeichnung eines rechtwinkligen Teildreikants aus einer Seite oder Kathete h und ihrem Gegenwinkel β: Fall 6 in 195).

Höhen eines Dreikants sind die Winkel, welche die Kanten mit den gegenüberliegenden Seitenflächen bilden.

Transversalen sind die Winkel, welche die Kanten mit den Halbierungsgraden der gegenüberliegenden Seiten einschließen.

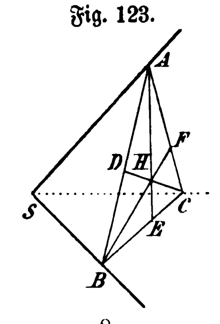
Winkelhalbierende sind die Winkel, welche die Kanten mit den Schnittgeraden ihrer keilwinkelhalbierenden Ebenen und Gegenseiten einschließen.

Mittellote sind die zu den Seiten des Dreikants durch deren Halbierungsgeraden senkrecht gelegten Ebenen u. s. f.

198. Satz: Die Ebenen der Höhen, Transversalen, Winkelhalbierenden, Mittellote u. s. f. schneiden sich je nach einer Geraden durch die Spitze des Dreikants.

Beweis für die Höhen: H sei ein beliebiger Punkt der Schnittgeraden der Höhenebenen h und h', d. h. der Ebenen (ASE) und (BSF), welche die Kanten AS und BS auf die Gegenseiten projizieren. Ziehe durch H die Lote AE $\perp$ (BSC) und BF $\perp$ (ASC), so folgt gemäß 68), daß die durch AE und BF gelegte Ebene (ABC) $\perp$ CS und somit

Fig. 123.



$$CS \perp AB \quad \text{aber auch} \quad CD \perp AB$$

als dritte Höhe des $\triangle ABC$, somit

$$(CDS) \perp AB \quad \text{und daher} \quad CDS \perp (ASB)$$

d. h. die dritte Höhenebene (CDS) = h'' geht durch die Schnittgerade SH der beiden anderen.

Beweis für die Transversalen: Schneide auf den Kanten von der Spitze des Dreikants aus gleiche Strecken ab und benütze für das Dreieck der Endpunkte den Tranversalensatz.

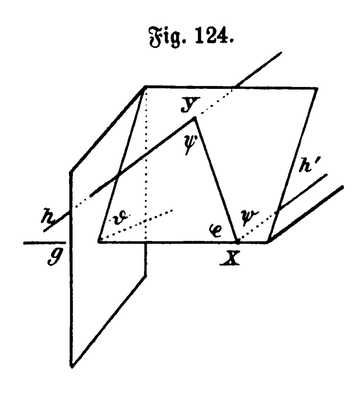
Beweis für die Winkelhalbierenden: Siehe 71).

Beweis für die Mittellote ähnlich dem für die Transversalen.

Beispiele.

199. 1. Aufgabe: Zwei geg. windschiefe Gerade durch eine dritte Gerade so zu schneiden, daß diese mit den ersteren vorgeschriebene Winkel bildet.

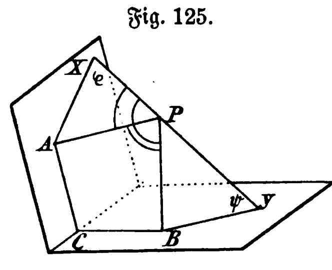
Fig. 124.



XY sei die gesuchte Gerade, welche die geg. Geraden g und h unter den Winkeln φ und ψ schneidet. Ziehe durch X die Parallele h' zu h, so ist $\sphericalangle$ h'g der Winkel der geg. Windschiefen und $\sphericalangle$ h'XY = $\sphericalangle\ \psi$, als innere Wechselwinkel. Das Dreikant bei X ist somit eindeutig bestimmt durch seine drei Seiten φ, ψ, $\sphericalangle$ gh. Ermittelt man daher in einer Nebenzeichnung dieses Dreikants (Fall 1) den Winkel ϑ an der Kante g, so hat man, mit Hilfe einer zu g senkrechten Keilwinkelebene, durch g eine Ebene zu legen, welche mit der durch g zu h parallel gelegten Ebene (gh') eben diesen $\sphericalangle\ \vartheta$ einschließt. Diese Ebene trifft h im Punkt Y. Von Y aus ziehe man die Gerade YX bezw. YX_1 unter $\sphericalangle\ \varphi$ nach g.

200. 2. Aufgabe: Durch einen geg. Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche mit zwei geg. Ebenen vorgeschriebene Winkel φ und ψ bildet.

Fig. 125.



Fälle von P auf die geg. Ebenen die Lote, so schließen diese das Supplement des $\sphericalangle\ \vartheta$ der geg. Ebenen ein und es entsteht bei P ein Dreikant, das durch seine drei Seiten $90 - \varphi$, $90 + \psi$, $180 - \vartheta$ eindeutig bestimmt ist. Eine Seitenebene, die Ebene der beiden Lote, liegt fest. Legt man daher durch diese Lote die beiden Ebenen, welche mit der festen Seitenebene die aus der Nebenfigur des Dreikants gefundenen Winkel bilden, so ist deren Schnittgerade, die Gegenkante der festen Seitenebene, die gesuchte Gerade.

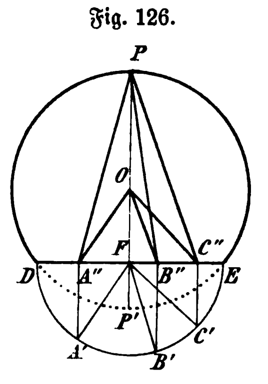
Der Kugelkleinkreis.

201. Der Begriff des sphärischen Dreiecks ist wegen der Einschränkung, daß die Seiten Großkreisbögen sein müssen, ein eng gezogener. Wenn es mög-

lich ist, auf der Kugelfläche außer den Großkreisen andere Kreise zu zeichnen, so ist ganz allgemein jedes von Kugelkreisbögen gebildete Dreieck als sphärisches Dreieck zu bezeichnen.

Schneidet man daher die Kugel, da Kreise, also ebene Kurven gesucht werden, durch eine beliebige Ebene und verbindet drei oder mehr Punkte A, B, C... der entstehenden steten Schnittlinie mit dem Kugelmittelpunkt O und dem Fußpunkt F des von O auf die Schnittebene gefällten Lotes, so sind die entstehenden rechtwinkligen Dreiecke kongruent, da sie den Kugelhalbmesser zur Hypotenuse und OF zur gemeinsamen Kathete haben:

Fig. 126.



$$\triangle AFO \cong \triangle BFO \cong \triangle CFO \ldots$$

— stelle den Kleinkreis durch Drehung um DE senkrecht zur Ebene des Papiers, dann kommen A′, B′, C′ in die Lage von A, B, C — Fig. 126, somit

$$AF = BF = CF = \ldots (< AO)$$

d. h.

Satz: Der Schnitt einer Kugelfläche mit einer beliebigen Ebene ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt des vom Kugelmittelpunkt auf die Schnittebene gefällten Lotes ist.

Frage: In wieviel Punkten trifft eine Gerade eine Kugelfläche? Lege durch die Gerade eine beliebige, die Kugel schneidende Ebene!

202. Kugelhalbmesser R, Kleinkreishalbmesser r und Entfernung k der Kreisschnittebene vom Kugelmittelpunkt stehen in der Beziehung:

$$k^2 + r^2 = R^2$$

Je kleiner der Abstand der Schnittebene vom Kugelmittelpunkt, desto größer der Schnittkreis und umgekehrt. Verbindet man daher einen Punkt Q innerhalb der Kugel mit dem Kugelmittelpunkt O, so hat unter allen Ebenen durch Q die zu OQ senkrechte den größten Abstand k und erzeugt daher den kleinsten Schnittkreis. Q ist Mittelpunkt desselben.

Für $k = R$ schrumpft der Schnittkreis in einen Punkt P der Kugelfläche zusammen. Die Schnittebene wird zur Berührungsebene und steht im Endpunkt des zum Berührungspunkt P gezogenen Halbmessers auf letzterem senkrecht.

Für $k = 0$ wird der ebene Schnitt ein Großkreis.

Satz: Der zwei Punkte der Kugelfläche verbindende Großkreisbogen ist der kürzeste Weg auf der Kugel zwischen den beiden Punkten, denn

1. verläuft er in einer durch jene Punkte gehenden Ebene,
2. hat er, wenn man durch die Kugelsehne, welche die Punkte verbindet, alle möglichen Ebenen legt, unter sämtlichen entstehenden Schnittkreisen den größten Halbmesser und daher die kleinste Krümmung.

Man bezeichnet den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten der Kugelfläche auch als deren sphärische Entfernung.

Der den kürzesten Weg zum Vollkreis ergänzende Großkreisbogen stellt den längsten Weg dar, ersterer ist kleiner als ein halber Großkreis ($< 180^{\circ}$), letzterer größer ($> 180^{\circ}$).

203. Fig. 126: OF = k treffe, beiderseits verlängert, die Kugelfläche in den Gegenpunkten P und P'. Der zur Kleinkreisebene senkrechte Durchmesser PP' heißt Achse des Kleinkreises, die Endpunkte des Durchmessers sind die Pole desselben. Dann ist

$$\triangle PFA \cong \triangle PFB \cong \triangle PFC \ldots$$

somit

$$PA = PB = PC = \ldots$$

daher sind auch, da zu gleichen Sehnen gleiche Großkreisbögen gehören, die zum Kleinkreis senkrechten Großkreisbögen jener Sehnen gleich:

$$\text{Bogen } PA = \text{Bogen } PB = \text{Bogen } PC$$

somit

Satz: Die Pole eines Kugelschnittkreises haben von allen Punkten desselben gleiche gerade und gleiche sphärische Entfernung.

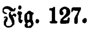
Insbesondere ist die geradlinige Entfernung des Pols vom Aequator $\sqrt{2} \cdot R$, die sphärische 90°.

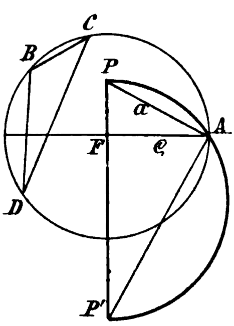
Auf der Kugel ist somit, innerhalb der Grenzen 0 und 2R für die Zirkelöffnung, der Gebrauch des Zirkels ebenso unbeschränkt, wie in der Ebene, so ist z. B. die Zeichnung eines sphärischen Dreiecks, ohne Zuhilfenahme des Dreikants, unmittelbar auf der Kugelfläche genau so ausführbar, wie diejenige eines Dreiecks der Ebene. Die geg. Winkel, Seiten, Höhen u. s. f. werden durch ihre den Schenkeln R zugehörigen Bögen gemessen. Diese Bögen sind auf den mit Zirkelbildung $\sqrt{2}\,R$ beschriebenen, entsprechenden Aequatorbögen abzutragen. Kugelkreise werden um deren Pole als sphärische Mittelpunkte beschrieben; gewöhnlich wählt man den Pol, dessen sphärische Entfernung $< 90^{\circ}$ ist.

204. Aufgabe: Von einem beliebigen Stück einer Kugelschale den Kugelhalbmesser zu ermitteln.

Wähle auf der Schale einen Punkt P so, daß es möglich ist, um ihn als Pol mit beliebiger Zirkelöffnung PA = a einen Kugelkreis oder wenigstens einen Teil eines solchen zu beschreiben. Ueberträgt man ein beliebiges, dem Kreis einbeschrieben gedachtes $\triangle$ BCD durch Abstecken der Entfernungen der Eckpunkte (Messen der Sehnen) mittels des Zirkels in eine beliebige Zeichnungsebene, so erscheint der Kugelkreis als Umkreis des übertragenen Dreiecks. Der Halbmesser desselben FA = ϱ als Höhe und die ursprüngliche Zirkelöffnung a als Kathete bestimmen ein rechtwinkliges $\triangle$ PAP', dessen Hypotenuse PP' der gesuchte Kugel-

durchmesser ist. Fig. 127: Stelle den Kleinkreis durch Drehung um AF senkrecht zur Ebene des Papiers.


Fig. 127.



Algebraisch berechnet sich R aus

$$PA^2 = PF \,.\, PP'$$

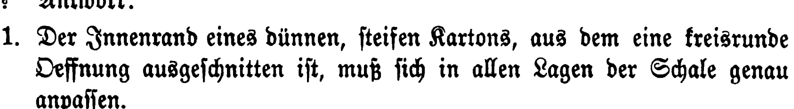
oder

$$a^2 = \sqrt{a^2 - \varrho^2} \,.\, 2R$$

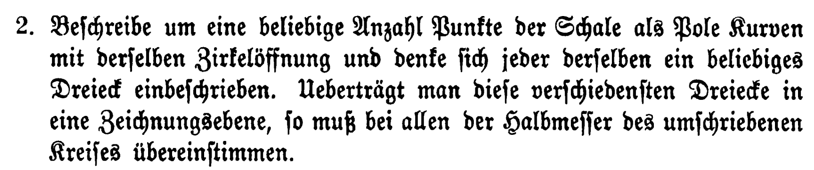
woraus

$$2R = \frac{a^2}{a^2 - \varrho^2} \sqrt{a^2 - \varrho^2}$$

Frage: Wie hätte man mittels eines Zirkels zu untersuchen, ob die Schale wirklich einer Kugel angehört? Antwort:



1. Der Innenrand eines dünnen, steifen Kartons, aus dem eine kreisrunde Oeffnung ausgeschnitten ist, muß sich in allen Lagen der Schale genau anpassen.



2. Beschreibe um eine beliebige Anzahl Punkte der Schale als Pole Kurven mit derselben Zirkelöffnung und denke sich jeder derselben ein beliebiges Dreieck einbeschrieben. Ueberträgt man diese verschiedensten Dreiecke in eine Zeichnungsebene, so muß bei allen der Halbmesser des umschriebenen Kreises übereinstimmen.

Vergleiche die Verwendung des Sphärometers in der Physik zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers sphärischer Linsen.

205. Für diejenigen sphärischen Dreiecke, deren Seiten Kleinkreisbögen sind, ist der Kugelmittelpunkt nicht mehr die Spitze des zugehörigen Dreikants; die Winkel des letzteren sind von denen verschieden, unter welchen sich die Kleinkreise schneiden u. s. f. Die Betrachtung dieser Dreiecke ist daher weniger einfach und an dieser Stelle ausgeschlossen.

Die Geometrie auf der Kugel.

206. Da die Ebene als Kugel von unendlich großem Halbmesser und die Geraden der Ebene als Kreise dieser Kugel betrachtet werden können, so sind die Sätze der ebenen Geometrie zwischen Kreisen und Geraden als Sonderfälle allgemeinerer Sätze zwischen Kreisen einer Kugelfläche mit endlichem Halbmesser aufzufassen.

Diese Geometrie der Kugel erschöpfend zu behandeln, d. h. für jeden Satz der Ebene den entsprechenden für die Kugel aufzustellen, würde zu weit führen. Den bereits behandelten Flächensätzen 143) u. s. f. mögen im nachstehenden noch einige zur Lösung sphärischer Dreiecksaufgaben häufig benützte Sätze angegliedert werden. Schwierigere Aufgaben über sphärische Dreiecke werden meist trigonometrisch behandelt.

207. Erweitert man die Ebenen der Höhen, Transversalen u. s. f. eines Dreikants bis zum Schnitt mit der Fläche des zugehörigen sphärischen Dreiecks, so entstehen die sphärischen Höhen u. s. f. des letzteren, somit gemäß 198)

Satz: Die sphärischen Höhen, Transversalen, Mittellote, Winkelhalbierenden u. s. f. eines sphärischen Dreiecks schneiden sich in je einem Punkt.

Da zu gleichen Zentriwinkeln (Nachweis derselben mittels Dreikanten und kongruenter rechtwinkliger Dreiecke) gleiche Bögen gehören, so folgt

Satz: Der Schnittpunkt der sphärischen Mittellote eines sphärischen Dreiecks ist sphärischer Mittelpunkt des Umkreises desselben.

Satz: Die vier Schnittpunkte der sechs sphärischen Winkelhalbierenden eines sphärischen Dreiecks sind die sphärischen Mittelpunkte des Inkreises und der drei Ankreise.

Da die Ebenen, welche die Schnittgeraden der Winkelhalbierenden eines Dreikants auf die Seitenflächen des letzteren projizieren, die Kugelfläche nach den sphärischen Halbmessern zu den Berührungspunkten des Inkreises und der Ankreise des zugehörigen Kugeldreiecks schneiden, so folgt

Satz: Die sphärischen Halbmesser zu den Berührungspunkten des Inkreises und der Ankreise eines sphärischen Dreiecks stehen senkrecht auf den Seiten desselben.

Beispiele.

208. 1. Aufgabe: Zu einem beliebigen Kugelkreisbogen das sphärische Mittellot zu zeichnen.

Beschreibe um die Endpunkte des geg. Kreisbogens mit demselben beliebigen Halbmesser zwei sich in C und D schneidende Kreise, und um diese Punkte wieder Kreise mit Halbmesser $\sqrt{2}\,R$, die sich in den Polen des gesuchten Mittellots treffen. Der Kreis um irgend einen dieser Pole mit Halbmesser $\sqrt{2}\,R$ ist der gesuchte.

2. Aufgabe: Von einem beliebigen Punkt P der Kugel auf einen beliebigen Kugelkreis das sphärische Lot zu fällen.

Beschreibe um P mit beliebigem Halbmesser einen Kreis, der den geg. Kugelkreis in zwei Punkten trifft; um diese Punkte wieder Kreise mit beliebigem gleichem Halbmesser, die sich in einem Punkt Q schneiden mögen, dann bestimmen die Kreise um P und Q mit Halbmesser $\sqrt{2}\,R$ die Pole des gesuchten sphärischen Lots u. s. f.

3. Aufgabe: Den Winkel zweier Großkreise zu halbieren.

Beschreibe um die Spitze A des geg. Winkels mit beliebigem Halbmesser einen Kreis, der die Schenkel in B und C trifft; um diese Punkte wieder Kreise mit gleichem beliebigem Halbmesser, die sich in einem Punkt D treffen, dann be-

stimmen die Kreise um A und D mit Halbmesser $\sqrt{2}\,R$ die Pole als sphärische Mittelpunkte u. s. f.

Die angewandten Verfahren entsprechen somit vollkommen denen der Ebene; ebenso werden die Beweise geführt, mit Hilfe entsprechend gleicher sphärischer Dreiecke.

209. 4. Aufgabe: Auf einer Kugel vom Halbmesser R ein sphärisches Dreieck zu zeichnen aus einer Seite a, dem Halbmesser r des Umkreises und $\sphericalangle \beta$; kurz: Geg. Kugel R, Dreieck aus a, r, β.

Die zu den Schenkeln R gehörigen Bögen der drei geg. Winkelgrößen seien a, r, β und werden durch ihre Sehnen gemessen.

Trage auf dem, um einen beliebigen Punkt P der Kugelfläche als Mittelpunkt mit Zirkelöffnung $\sqrt{2}\,R$ beschriebenen Aequator den Bogen BC = a ab. Beschreibe um den einen der beiden Punkte O, in denen sich die um B und C mit Zirkelweite r gezeichneten Kreise treffen, den Umkreis mit Halbmesser r und trage auf dem um B mit Halbmesser $\sqrt{2}\,R$ beschriebenen Aequator, von dessen Schnittpunkt D mit BC aus, den Bogen DE = β (bezw. DE′) ab, so ergiebt sich Ecke A (bezw. A′) als Schnitt des Umkreises mit Großkreis BE (bezw. BE′). Großkreis AC (bezw. A′C) vollendet das gesuchte Dreieck. Die Zeichnung von Großkreisen erfordert zuvor die Bestimmung der Pole als sphärischer Mittelpunkte mit Hilfe der Kreise vom Halbmesser $\sqrt{2}\,R$.

Die Lösung ist eindeutig, denn Δ ABC entsprechend gleich Δ A′BC.

210. Satz: Die beiden von einem Punkt einer Kugelfläche an einen Kreis derselben gezogenen sphärischen Tangenten sind gleich.

Verbinde den Kugelmittelpunkt O mit dem geg. Punkt P bis zum Schnitt in Q mit der Ebene des Kreises. Die von Q an letzteren möglichen geradlinigen Tangenten QA und QB bestimmen mit QO zwei Großkreisebenen, welche die Kugel nach den, den Kugelkreis in A und B berührenden Großkreisen, den sogen. sphärischen Tangenten, schneiden. Um diese zu zeichnen, bestimme man zuvor ihre Pole mittels der Kreise um P und A bezw. P und B mit Halbmesser $\sqrt{2}\,R$.


Fig. 128.

Aus

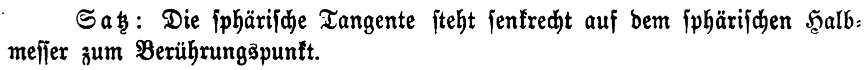
$\Delta\,OQA \cong \Delta\,OQB$ folgt $\sphericalangle\,OQA = \sphericalangle\,OQB$

somit

$\Delta\,PQA \cong \Delta\,PQB$ daher $PA = PB$

und somit

Bogen PA = Bogen PB.


Satz: Die sphärische Tangente steht senkrecht auf dem sphärischen Halbmesser zum Berührungspunkt.

Da gemäß 203) sphärischer Halbmesser und Kugelkreis aufeinander senkrecht stehen, letzterer aber mit der sphärischen Tangente die gerade Tangente QA

gemein hat, so stehen thatsächlich die an sphärische Tangente und sphärischen Halbmesser im Berührungspunkt A gezogenen geraden Tangenten aufeinander senkrecht.

211. Aufgabe: Geg. Kugel R. Ein sphärisches Dreieck zu zeichnen aus b, h, ϱ.

Bestimme die zu den Schenkeln R gehörigen Zirkelweiten der geg. Winkelgrößen.

Zeichne mit Oeffnung $\sqrt{2}$R zwei zu einander senkrechte Großkreise, die sich in D schneiden. Jeder derselben hat seinen Mittelpunkt auf dem Umfang des anderen. Sind P und Q diese Mittelpunkte, so trage man DA = h auf DP ab, beschreibe um den Endpunkt A mit b einen Kreis, der QD in C (bezw. C') trifft. Die Kreise um A und C mit $\sqrt{2}$R bestimmen den Pol des Großkreises AC. Die Parallelkreise zu QC im sphärischen Abstand ϱ — sphärischer Mittelpunkt P und Halbmesser $90 \pm \varrho$ — sind geometrischer Ort für den Mittelpunkt des Inkreises und werden von dem, $\sphericalangle$ ACD halbierenden Großkreis im gesuchten Mittelpunkt geschnitten. Ziehe von A aus an den Inkreis die sphärische Tangente AB. Anzahl der Lösungen?

212. Satz: Sämtliche in einen Kugelkreis gelegten Großkreisbögen von gleicher Länge, sogen. sphärische Sehnen, schneiden den Kugelkreis unter demselben Winkel und werden in ihren Mitten von einem zu diesem Kugelkreis konzentrischen Kugelkreis berührt.

Oder: Sämtliche Punkte einer Kugelfläche von der Eigenschaft, daß die von ihnen an einen geg. Kugelkreis gelegten sphärischen Tangenten gleiche Länge haben oder denselben Winkel einschließen, liegen auf einem konzentrischen Kugelkreis.

Beweis wie in der Ebene mittels entsprechend gleicher (kongruenter) sphärischer Dreiecke.

212a. Dieser Satz gestattet eine einfache Lösung der

Aufgabe: Von einem Punkt P einer Kugelfläche eine sphärische Tangente an einen Kleinkreis mit sphärischem Mittelpunkt K zu ziehen.

Beschreibe um K den konzentrischen Kugelkreis durch P und fälle auf ihn von K das sphärische Lot KD. Trage auf dem konzentrischen Kreis Bogen DP' = Bogen DP ab, so ist der durch P und P' gelegte Großkreis die gesuchte sphärische Tangente.

Ohne Benützung des Satzes 212) findet man den sphärischen Mittelpunkt der sphärischen Tangente an den Kugelkreis, dessen sphärischer Halbmesser ϱ^0 betragen möge, mittels der Kreise um den geg. Punkt mit der zu $\sphericalangle 90^0$ und um den sphärischen Mittelpunkt K des geg. Kreises mit der zu $\sphericalangle 90 - \varrho$ gehörigen Sehne als Zirkelweite. Schenkellänge R vorausgesetzt. Zwei Lösungen.

213. Satz: Der Großkreis, dessen Ebene durch die Schnittgerade der Ebenen zweier beliebiger Kleinkreise geht, ist Ort aller Punkte von der Eigenschaft, daß ihre an diese Kleinkreise gelegten sphärischen Tangenten gleich sind.

Irgend ein Halbmesser OP des Großkreises treffe verlängert die Schnittgerade der Kleinkreise in Q, so folgt, wenn A, B, C, D die Berührungspunkte der von Q an die Kleinkreise gezogenen geraden Tangenten sind, daß

$$\triangle QOA \cong \triangle QOB \cong \triangle QOC \cong \triangle QOD$$

somit

$$\sphericalangle POA = \sphericalangle POB = \sphericalangle POC = \sphericalangle POD$$

und daher zu gleichen Zentriwinkeln gleiche Großkreisbögen als sphärische Tangenten.

Zugleich ergiebt die Kongruenz, daß

$$QA = QB = QC = QD$$

d. h.

Satz: Die Tangenten von einem Punkt an eine Kugel sind gleich.

214. Satz: Alle sphärischen Dreiecke, die einen Winkel und den der Gegenseite anbeschriebenen Kreis gemein haben, haben denselben Umfang.

Beweis wie in der Ebene mittels 210).

215. Satz: Alle sphärischen Dreiecke, die einen Winkel und den eingeschriebenen Kreis gemein haben, haben denselben Ueberschuß der Summe der zwei, den Winkel einschließenden Seiten über die dritte.

Fig. 129: Die Tangentialabschnitte u der Seiten b und c ändern sich bei der Bewegung der dritten Seite nicht, daher, mit Benützung von 210)

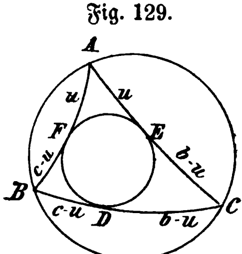
$$c - u + b - u = a$$

woraus

$$b + c - a = 2u = \text{konstans}$$

d. h. unveränderlich.

Fig. 129.



216. Satz: Alle sphärischen Dreiecke, welche die Grundseite und den Umkreis gemein haben, haben denselben Ueberschuß der Summe der Winkel an der Grundseite über den Winkel an der Spitze.

Fig. 130: Zieht man die sphärischen Halbmesser nach den Ecken, so bleibt $\sphericalangle BOC = \delta$ ungeändert, ebenso behält $\triangle BOC$, unabhängig von der Bewegung der Spitze A, seinen Flächeninhalt f, daher gemäß 143)

$$\frac{f}{F} = \frac{(\beta - \varphi) + \delta + (\gamma - \psi) - 180}{720}$$

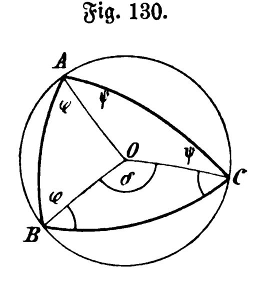
$$= \frac{\beta + \gamma - (\varphi + \psi) + \delta - 180}{720}$$

$$= \frac{\beta + \gamma - \alpha + \delta - 180}{720}$$

woraus

$$\beta + \gamma - \alpha = \frac{f}{F} \cdot 720^\circ + 180^\circ - \delta = \text{konstans}.$$

Fig. 130.



217. Satz: Der geometrische Ort der Spitzen A aller flächengleichen sphärischen Dreiecke über derselben Grundseite BC ist ein durch die Gegenpunkte B′ C′ gehender Kleinkreis.

Geg. △ ABC. Der Satz ist bewiesen, sobald für dieses Dreieck, wenn seine Spitze A sich auf dem Kleinkreis AB′C′ bewegt, der sphärische Exzeß ε sich nicht ändert.

Da der Kleinkreis AB′C′ Umkreis des sphärischen △ AB′C′ ist, und die Grundseite B′ C′ dieses Dreiecks fest bleibt, so besteht zwischen den Winkeln dieses Dreiecks $\sphericalangle \beta'$ und $\sphericalangle \gamma'$ an der Grundseite und $\sphericalangle$ B′AC′ = BAC = $\sphericalangle \alpha$ an der wandernden Spitze, gemäß 216) die Beziehung

$$\beta' + \gamma' - \alpha = k = \text{konstans}$$

oder da

$$\beta' = 180 - \beta$$
$$\gamma' = 180 - \gamma$$
$$\overline{360 - (\alpha + \beta + \gamma) = k}$$

woraus

$$\alpha + \beta + \gamma - 180 = 180 - k$$

d. h.

$$\varepsilon = \text{konstans}.$$

Kommt die Spitze A einer der Gegenecken, etwa B′, unendlich nahe, so berührt die Bogenseite AB den Kleinkreis in B′, das sphärische Dreieck geht in ein flächengleiches sphärisches Zweieck über, dessen Winkel der $\sphericalangle \omega$ des Kleinkreises mit der Grundseite BC ist. Daher, wenn f die Fläche des sphärischen Dreiecks und F die ganze Kugelfläche ist,

$$\frac{f}{F} = \frac{\omega}{720}$$

d. h.: Der Winkel des Kleinkreises, des Orts der Spitzen aller flächengleichen sphärischen Dreiecke, mit der festliegenden gemeinschaftlichen Grundseite ist der unveränderliche sphärische Exzeß der Dreiecke.

Kugelsekante und Tangente.

218. Satz: Das Rechteck aus den Abschnitten aller, durch denselben Punkt innerhalb bezw. außerhalb einer Kugelfläche gezogenen Sehnen bezw. Sekanten ist unveränderlich.

Beweis: Lege durch je zwei aufeinander folgende Sehnen oder durch jede Sehne und den Kugelmittelpunkt eine Ebene, so folgt der Satz aus dem gleichlautenden der Ebene für jeden der entstehenden Schnittkreise.

Wird von zwei sich schneidenden Sekanten durch Drehung um den Schnittpunkt die eine zur Tangente, so folgt als Sonderfall

Satz: Das Quadrat über der Tangente ist gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der Sekante.

Zugleich ergiebt sich auch hieraus wieder die früher schon bewiesene Gleichheit der Kugeltangenten von einem Punkt aus.

Beispiele.

219. Aufgabe: Durch drei geg. Punkte eine Kugelfläche zu legen, die eine geg. Gerade berührt.

Die Tangente vom Schnittpunkt Q der geg. Geraden und der Ebene der drei Punkte an den durch letztere gelegten Kreis giebt den konstanten Abschnitt aller Kugeltangenten des Punkts Q. Trage denselben daher auf der geg. Geraden von Q aus (zweimal) ab und errichte im Endpunkt die zur Geraden senkrechte Ebene, so trifft letztere das im Mittelpunkt des Kreises der drei Punkte auf deren Ebene errichtete Lot im gesuchten Kugelmittelpunkt. Lösungen?

220. Aufgabe: Von einem Punkt P außerhalb einer Kugel an diese eine Berührungsgerade zu ziehen.

Lege durch P und den Kugelmittelpunkt O eine Ebene, so hat die von P an den entstehenden Großkreis gezogene Tangente PA nur den Berührungspunkt A mit der Kugel gemein, ist daher die gesuchte Tangente. Anzahl der Lösungen?

Durch Drehung des Großkreises um die Achse PO erhält man die unendlich vielen von P aus an die Kugel möglichen Tangenten, zugleich folgt wieder die Gleichheit der Tangentenabschnitte. Dieselben berechnen sich aus $PO = a$ und dem Kugelhalbmesser R zu

$$t = \sqrt{a^2 - R^2}$$

Bei dieser Drehung beschreibt der Berührungspunkt A einen zu PO senkrechten Kleinkreis, daher

Satz: Ort der Berührungspunkte aller von einem Punkt an eine Kugel gezogenen Tangenten ist ein zur Zentrale dieses Punkts senkrechter Kleinkreis.

Es ist nicht nötig, ausschließlich Großkreise für die Lösung dieser Aufgabe zu benützen. Legt man durch P eine beliebige Ebene, welche die Kugel nach einem Kleinkreis mit Mittelpunkt C schneidet, so sind die an letzteren gezogenen Tangenten PX und PX′ ebenfalls Kugeltangenten. Daß $PX = PA$, ergiebt sich aus

$$\begin{aligned} PX^2 &= PC^2 - XC^2 \\ &= (a^2 - OC^2) - (R^2 - OC^2) \\ &= a^2 - R^2 = PA^2 \end{aligned}$$

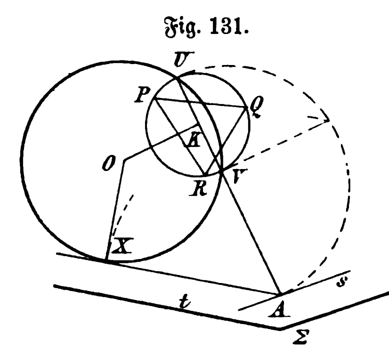
221. Aufgabe: Durch eine geg. Gerade eine Berührungsebene an eine Kugel zu legen.

Die Aufgabe ist zurückgeführt auf 65): Die vom Kugelmittelpunkt auf die geg. Gerade gefällte Ebene schneidet diese in einem Punkt, von dem aus an den zugleich erzeugten Großkreis die Tangenten zu ziehen sind. Anzahl der Lösungen?

222. Aufgabe: Durch drei geg. Punkte eine Kugelfläche zu legen, die eine geg. Ebene Σ berührt.

Das im Mittelpunkt K des Kreises der drei Punkte auf deren Ebene errichtete Lot ist geometrischer Ort für den Kugelmittelpunkt O. Jede durch dieses Lot gelegte Ebene, also auch diejenige durch den zu suchenden Berührungspunkt X der Kugel und der geg. Ebene, ist Großkreisebene. Gelingt es, den Großkreis der Ebene (XKO) zu ermitteln, so entsteht durch Drehung desselben um irgend einen Durchmesser die gesuchte Kugelfläche. Da (XKO) als Ebene durch OK sowohl als durch XO zur Ebene der drei Punkte und zur geg. Ebene senkrecht steht, so steht sie auch auf deren Schnittgeraden s senkrecht und schneidet Σ nach einer Tangente t in X an den gesuchten Großkreis (140). Fällt man daher von K auf s das Lot KA, das den Kreis der drei Punkte in den Punkten U und V trifft, so sind U und V Punkte des gesuchten Großkreises, das Lot t auf s in Σ wird Tangente und man hat daher in Ebene (KAt) nur noch die Aufgabe zu lösen: Einen Kreis zu zeichnen, der eine geg. Gerade t berührt und durch zwei geg. Punkte U und V geht. Benütze hiezu den Satz über das Quadrat der Tangente. Anzahl der Lösungen? Fig. 131: Man denke sich die Ebene der drei Punkte (PQR) durch Drehung um UV senkrecht zur Ebene des Papiers gestellt.

Fig. 131.



Pol und Polarebene der Kugel.

223. Die Ebene des Kreises der Berührungspunkte aller von einem Punkt P an eine Kugel gezogenen Tangenten heißt „Polarebene“ und P heißt ihr „Pol“. Legt man durch P alle möglichen Kugelkreisebenen, so folgen die von der ebenen Geometrie her bekannten Eigenschaften von Pol und Polare auch für den Raum, daher

Satz: Die Polarebene der Kugel ist

1. Ort für diejenigen Punkte aller Sekanten eines Pols, die durch die Kugelfläche vom Pol harmonisch getrennt sind,
2. Ort aller Polaren des Pols bezüglich sämtlicher Schnittkreise, deren Ebenen durch den Pol gehen,
3. Ort der Schnittgeraden je zweier Ebenen, welche die Kugelfläche in zwei auf einer Sekante des Pols liegenden Punkten berühren,
4. Ort der Berührungspunkte aller, vom Pol an die Kugel gelegten Tangenten und Tangentialebenen.

224. Daß der Mittelpunkt K des Kreises der Berührungspunkte aller Kugeltangenten von einem Punkt P aus ebenfalls als Pol und die in P zur Zentrale PKO senkrechte Ebene als zugehörige Polarebene betrachtet werden kann, ergiebt sich wie folgt:

Die in einer beliebigen Großkreisebene durch die Zentrale PO auf letzterer in P errichtete Senkrechte ist Polare zu K. Hält man bei der Drehung um die Zentrale zwei Lagen f und g dieser Polare fest und legt durch K irgend eine Ebene, welche diese Lagen in X und Y trifft, so wird XK sowohl als YK durch den entstehenden Schnittkreis harmonisch geteilt, d. h. XY und daher auch jede andere, irgend zwei Punkte von f und g verbindende Gerade ist Polare zu K, oder die ganze Ebene (fPg) ist Polarebene zu K. Die Sätze 223) 1—3 behalten auch im vorliegenden Fall, Pol K innerhalb der Kugel, ihre Gültigkeit.

Beziehungen zwischen mehreren Kugeln.

225. Dreht man zwei sich schneidende Kreise nebst ihrer gemeinschaftlichen Sehne um die Zentrale beider Kreise als Achse, so folgt

Satz: Die Schnittlinie zweier sich schneidender Kugeln ist ein Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Zentrale beider Kugeln ist und von ihr im Mittelpunkt getroffen wird.

Zwei Kugeln schneiden sich, wenn ihre Zentrale $d < R + r$ oder $d > R - r$, sie berühren sich von außen, wenn $d = R + r$, von innen, wenn $d = R - r$.

Wird der Radius der einen Kugel unendlich groß, so folgt der Satz über den Schnitt der Kugel durch eine Ebene, wird auch der Radius der anderen unendlich, so folgt der Satz über den Schnitt zweier Ebenen.

Frage: In höchstens wieviel Punkten schneiden sich drei Kugeln?

Antwort: Man denke sich die Ebene des Schnittkreises zweier Kugeln bis zum Schnitt mit der dritten Kugel erweitert u. s. f.

226. Aufgabe: Eine Kugelfläche mit geg. Halbmesser R durch zwei geg. Punkte so zu legen, daß sie eine geg. Ebene berührt.

Beschreibe um die geg. Punkte als Mittelpunkte mit dem geg. Halbmesser Kugeln, die sich nach einem Kreis schneiden mögen. Bestimme die Schnittpunkte dieses Kreises mit den beiden Parallelebenen zur geg. Ebene im Abstand R. Anzahl der Lösungen?

226a. Aufgabe: Um einen geg. Punkt eine Kugel zu beschreiben, die zwei beliebig geg. Kugeln nach gleichen Kreisen schneidet.

Lege durch den geg. Punkt und die Mittelpunkte der beiden Kugeln eine Ebene, so ist die Aufgabe auf diejenige der ebenen Geometrie zurückgeführt: Um einen geg. Punkt einen Kreis zu beschreiben, der zwei geg. Kreise nach gleichen Sehnen schneidet. Man denke sich den einen der Kreise um den geg. Punkt gedreht, bis die Sehnen sich decken.

Potenzebene, Potenzachse, Potenzpunkt.

227. Liegt von zwei Kreisen der eine a) ganz innerhalb, b) ganz außerhalb des anderen, c) schneiden sie sich, so verläuft ihre Potenzgerade a) außerhalb, b) zwischen den Umfängen der Kreise, c) sie ist die Schnittgerade beider Kreise. Durch Drehung um die Zentrale der Kreise wird die Potenzgerade zu der zur Zentrale senkrechten Potenzebene zweier Kugeln. Lagenverhältnisse und Eigenschaften der Potenzgeraden bleiben erhalten für die Potenzebene; daher

Satz: Die Tangenten von irgend einem Punkt der Potenzebene zweier Kugeln an letztere sind gleich.

Oder: Die Potenzebene zweier Kugeln ist Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche diese beiden rechtwinklig schneiden.

228. Da die Potenzebene einer ersten und zweiten Kugel diejenige dieser zweiten und einer dritten Kugel nach einer Geraden schneidet von der Eigenschaft, daß die Tangenten von jedem ihrer Punkte an alle drei Kugeln gleich sind, so muß auch die Potenzebene der dritten und ersten Kugel durch diese Gerade gehen, und da die Ebene der drei Mittelpunkte, die Zentralebene, zu jeder der Potenzebenen senkrecht steht, so steht sie auch zu deren Schnittgeraden senkrecht; daher

Satz: Die drei Potenzebenen dreier Kugeln schneiden sich nach einer zur Zentralebene der Kugeln senkrechten Geraden, der sogen. Potenzachse. Die von einem Punkte der Potenzachse an die drei Kugeln gelegten Tangenten sind gleich.

Oder: Die Potenzachse dreier Kugeln ist Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche die drei Kugeln rechtwinklig schneiden.

229. Tritt zu den drei Kugeln eine vierte, so trifft die Potenzebene der vierten und einer der drei Kugeln, etwa der ersten, die Potenzachse der drei Kugeln in einem Punkt, von dem aus die Tangenten an die vierte und erste Kugel und somit an alle vier Kugeln gleich sind. Durch diesen Punkt gehen daher sämtliche Potenzebenen und Potenzachsen der vier Kugeln, d. h.

Satz: Die sechs Potenzebenen von vier Kugeln schneiden sich nach drei Potenzachsen durch einen Punkt, den Potenzpunkt. Die Tangenten vom Potenzpunkt an sämtliche vier Kugeln sind gleich, oder der Potenzpunkt von vier Kugeln ist Mittelpunkt einer Kugel, welche die vier Kugeln rechtwinklig schneidet.

230. Vertauscht man die Abstände der Potenzgeraden zweier Kreise von deren Mittelpunkten, so erhält man die sogen. zweite Potenzgerade der zwei Kreise und durch Drehung um die Zentrale die sogen. zweite Potenzebene zweier Kugeln. Die Eigenschaft der zweiten Potenzgeraden lautet auf die zweite Potenzebene übertragen:

Satz: Die zweite Potenzebene zweier Kugeln ist Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche die beiden Kugeln nach Großkreisen schneiden.

Dieselben Betrachtungen wie 229) ergeben:

Satz: Die drei zweiten Potenzebenen dreier Kugeln schneiden sich nach einer zur Mittelpunktsebene der Kugeln senkrechten Geraden der zweiten Potenzachse der drei Kugeln. Sie ist Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche die drei Kugeln nach Großkreisen schneiden.

Satz: Die sechs zweiten Potenzebenen von vier Kugeln schneiden sich nach drei zweiten Potenzachsen durch einen Punkt, den zweiten Potenzpunkt. Er ist Mittelpunkt einer Kugel, welche die vier Kugeln nach Großkreisen schneidet.

230a. Betrachte, ausgehend von den entsprechenden Sätzen der ebenen Geometrie, die Sonderfälle zu 227—230, wenn einzelne Kugeln zu Punkten zusammenschrumpfen. Man erhält eine Reihe von Sätzen, wie z. B.

Die Potenzebene eines Punkts und einer Kugel ist Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, die durch diesen Punkt gehen und die geg. Kugel rechtwinklig schneiden u. s. f.

230b. Aufgabe: Den Mittelpunkt einer Kugel zu finden, welche durch zwei geg. Punkte geht, die eine von zwei geg. Kugeln rechtwinklig schneidet und die andere nach einem Großkreis trifft.

Lösung: Die erste Potenzebene zu einem der beiden Punkte und der ersten Kugel und die zweite Potenzebene zum selben Punkt und der zweiten Kugel schneiden sich nach einer Geraden, die von der Mittelllotebene der beiden geg. Punkte im gesuchten Mittelpunkt getroffen wird.

Aehnlichkeitspunkte. Apollonische Kugel.

231. Die Aehnlichkeitspunkte zweier in einer Ebene liegenden Kreise bleiben Aehnlichkeitspunkte der durch Umdrehung um die Zentrale entstehenden Kugeln und liegen zu den Mittelpunkten harmonisch. Die Tangenten bezw. Tangentialebenen von einem der Aehnlichkeitspunkte an die eine Kugel berühren zugleich die andere, daher

Satz: Jede der unendlich vielen gemeinschaftlichen Berührungsebenen zweier Kugeln geht durch einen der Aehnlichkeitspunkte.

232. Legt man durch die Mittelpunkte dreier Kugeln die Ebene, so liegen nach dem Satz von Monge die sechs Aehnlichkeitspunkte der drei entstehenden Großkreise und somit auch der drei Kugeln zu je dreien auf vier Geraden der Mittelpunktsebene. Durch jede dieser vier Aehnlichkeitsachsen sind zwei Berührungsebenen an eine Kugel möglich. Aber jede dieser Ebenen berührt gemäß 231) alle drei Kugeln, daher

Satz: Drei beliebige sich nicht schneidende Kugeln besitzen acht gemeinschaftliche Berührungsebenen.

Anzahl der Berührungsebenen, wenn zwei bezw. alle drei Kugeln sich schneiden?

233. Beschreibt man über dem Abstand der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise als Durchmesser den Apollonischen Kreis, so folgt durch Drehung um die Zentrale:

Satz: Die Apollonische Kugel über dem Abstand der Aehnlichkeitspunkte zweier Kugeln ist Ort aller Punkte, von denen aus beide Kugeln unter gleichem Gesichtswinkel erscheinen.

Hat man drei Kugeln, so ist der Schnittkreis der Apollonischen Kugeln zur ersten und zweiten und zur zweiten und dritten der geg. Kugeln Ort aller Punkte, von denen aus sämtliche drei Kugeln unter gleichen Winkeln erscheinen, daher muß auch die Apollonische Kugel zur ersten und dritten der geg. Kugeln durch diesen Schnittkreis gehen, d. h.

Satz: Die drei Apollonischen Kugeln dreier beliebiger Kugeln schneiden sich in einem Kreis, von dessen Punkten aus alle drei Kugeln gleich groß erscheinen.

Tritt eine vierte Kugel hinzu, so trifft die Apollonische Kugel zur vierten und ersten den Apollonischen Schnittkreis der drei ersten Kugeln in zwei Punkten, durch welche somit sämtliche Apollonischen Kugeln der vier geg. Kugeln hindurchgehen, daher

Satz: Die sechs Apollonischen Kugeln zu vier geg. Kugeln schneiden sich in zwei Punkten, von denen aus alle vier Kugeln gleich groß erscheinen.

Konzentrische Kugeln.

234. Durch Drehung konzentrischer Kreise um bestimmte Durchmesser ergeben sich folgende Beziehungen:

1. Die Mittelpunkte aller Kugeln vom geg. Halbmesser r, die eine geg. Kugel vom Halbmesser R von außen bezw. innen berühren, liegen auf einer konzentrischen Kugel vom Halbmesser $R + r$ bezw. $R - r$.
2. Die Mittelpunkte aller Kugeln vom Halbmesser r, die eine geg. Kugel vom Halbmesser R nach einem Kleinkreis mit Halbmesser ϱ schneiden, liegen auf zwei konzentrischen Kugeln mit den Halbmessern $\sqrt{R^2 - \varrho^2} \pm \sqrt{r^2 - \varrho^2}$. Zeichne diesen Halbmesser aus R, r, ϱ.
3. Ort aller Punkte, deren Tangenten an eine geg. Kugel vom Halbmesser R die Länge t haben, ist eine konzentrische Kugel vom Halbmesser $\sqrt{R^2 + t^2}$. Diese Kugel ist zugleich
4. Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, die eine geg. Kugel rechtwinklig schneiden (Halbmesser t), und
5. Ort aller Punkte, von denen aus die Kugel unter gleichen Winkeln erscheint.
6. Die Berührungsebenen an die innere zweier konzentrischer Kugeln schneiden die äußere nach gleichen Kleinkreisen, deren Mittelpunkte die Berührungspunkte sind, oder

Ort für die Mittelpunkte aller gleichgroßen Kleinkreise einer Kugel ist eine konzentrische Kugel, welche die Kleinkreise in deren Mittelpunkten berührt.

235. Satz: Jede zwei konzentrische Kugeln schneidende Ebene schneidet einen Kreisring von unveränderlicher Fläche aus.

Beweis: Die Halbmesser der geg. Kugeln seien R und r, diejenigen ihrer Schnittkreise ϱ und ϱ' und der Abstand der Schnittebene vom Mittelpunkt der Kugeln k, so ist die Fläche F des Kreisrings

$$F = \pi\varrho^2 - \pi\varrho'^2 = \pi(R^2 - k^2) - \pi(r^2 - k^2)$$
$$= \pi(R^2 - r^2) = \text{konstans}.$$

236. Aufgabe: Den Mittelpunkt einer Kugel vom Halbmesser r zu finden, die eine geg. Kugel berührt, eine zweite rechtwinklig und eine dritte nach einem Kleinkreis vom Halbmesser ϱ schneidet.

Wähle die Mittelpunktsebene der drei geg. Kugeln zur Zeichnungsebene und beschreibe in ihr nun die Mittelpunkte der entstehenden Großkreise, deren Halbmesser R_1, R_2, R_3 sein mögen, die konzentrischen Hilfskreise mit den Halbmessern $R_1 \pm r$, $\sqrt{R_2^2 + r^2}$, $\sqrt{R_3^2 - \varrho^2} \pm \sqrt{r^2 - \varrho^2}$. Die Schnittpunkte der durch Rotation entstehenden konzentrischen Hilfskugeln sind die gesuchten Mittelpunkte. Anzahl der Lösungen?

237. Aufgaben zum V. Abschnitt:

1. Zwischen eine geg. Gerade und eine geg. Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit beiden vorgeschriebene Winkel bildet.
2. Dreikant aus b, c, h; b, c, h'; a, h', h''; a, h, h'.
3. Sphärisches Dreieck aus α, β, γ; a, β, γ; β, γ, b.
4. Sphärisches Dreieck aus β, γ, $a + b + c$; a, β, $b + c$.
5. Auf einer Kugelfläche vom Halbmesser R sind drei Punkte gegeben, deren Entfernungen mit dem Zirkel abgestochen werden können. Gesucht Seiten und Winkel des Dreikants, dessen Seitenflächen die Kugel in den geg. Punkten berühren.
6. Durch einen geg. Punkt einer Kugelfläche senkrecht zu einem geg. Großkreis einen Großkreis zu zeichnen. (Bestimme den Pol.)
7. Einen Kugelkreis vom sphärischen Halbmesser ϱ zu zeichnen, der zwei geg. Kugelkreise mit den sphärischen Halbmessern r_1 und r_2 berührt.
8. An zwei geg. Kugelkreise die gemeinschaftlichen sphärischen Tangenten zu legen. (Sonderfall von 7, da der sphärische Halbmesser der Tangenten bekannt ist.) Vier Lösungen.
9. Ein sphärisches Vieleck in ein sphärisches Zweieck von gleicher Fläche zu verwandeln.
10. Berechne die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Fläche $\frac{1}{16}$ der Kugelfläche beträgt.

11. Welchen Teil des Himmelsgewölbes überblickt man durch ein gleichseitiges dreieckiges Fenster von der Kante a, wenn sich das Auge in Kantenlänge a von den Ecken des Fensters befindet? (Betrachte das Auge als Mittelpunkt der sichtbaren Halbkugel des unendlichen Himmelsgewölbes und berechne die Kantenwinkel des entstehenden regulären Tetraeders mittels eines gleichschenkligen Dreiecks, das eine Kante zur Grundseite und die von ihren Endpunkten auf die Gegenkante gefällten Lote zu Schenkeln hat.)

12. Die kürzeste Entfernung (Luftlinie) zwischen zwei Erdorten (φ, λ) und (φ', λ'), deren Lage durch geographische Breite φ bezw. φ' und Länge λ bezw. λ' bestimmt sein möge, zu berechnen. — Benütze 188) für das durch zwei Seiten $90 - \varphi$ und $90 - \varphi'$ und den eingeschlossenen Winkel $\lambda - \lambda'$ bestimmte sphärische Dreieck und drücke die Anzahl Grade für die berechnete dritte Seite a in Kilometer aus: $1^\circ = 111$ km. —

13. Alle Ebenen, die von zwei geg. Punkten ein geg. Abstandsverhältnis haben, gehen durch einen der beiden Punkte, welche die Verbindungsstrecke der beiden geg. Punkte im geg. Verhältnis teilen. Harmonische Lage der vier Punkte.

14. Gesucht die Schnittgeraden aller Ebenen, die von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten ein geg. Abstandsverhältnis haben. Vier Lösungen.

15. Was ist der Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Quadrate der Entfernungen von zwei festen Punkten sich nicht ändert?

16. Was ist der Ort aller Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von zwei festen Punkten denselben Wert hat? Bedeutung der festen Punkte.

17. Ort aller Punkte, deren Verbindungsstrecken mit zwei festen Punkten einen rechten Winkel einschließen?

18. Ort aller Punkte, die von zwei geg. Punkten ein unveränderliches Abstandsverhältnis haben, ist die Kugelfläche über denjenigen beiden Teilpunkten als Durchmesser, welche die Verbindungsstrecke der geg. Punkte im geg. Verhältnis harmonisch teilen. (Apollonische Kugel.)

19. Ort aller Punkte, die von drei geg. Punkten ein unveränderliches Abstandsverhältnis haben?

20. Diejenigen Punkte zu bestimmen, die von vier geg. Punkten ein bestimmtes Abstandsverhältnis haben.

21. Auf einer geg. Geraden einen Punkt zu bestimmen, der von zwei geg. Punkten ein geg. Abstandsverhältnis hat.

22. Auf einer Kreislinie einen Punkt zu finden, von dem aus eine der Lage und Größe nach geg. Strecke unter einem rechten Winkel erscheint.

23. Auf einer geg. Kugel einen Punkt zu finden, von dem aus drei beliebige Kugeln gleich groß erscheinen.

24. Auf einer geg. Kugelfläche einen Punkt zu finden, von dem aus zwei geg. Kugeln geg. scheinbare Größe haben. (Vergl. 234. 5.)

25. Eine Kugel zu bestimmen, die von vier geg. Punkten aus geg. scheinbare Größen hat.
26. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die zwei konzentrische Kugelflächen so schneidet, daß die Fläche des inneren Schnittkreises die Hälfte derjenigen des äußeren beträgt. Vergl. 235).
27. Eine Kugelfläche vom Halbmesser R zu bestimmen, welche drei der folgenden Bedingungen erfüllt: 1. sie gehe durch einen geg. Punkt, 2. berühre eine geg. Ebene, 3. berühre eine geg. Kugelfläche, 4. schneide eine geg. Ebene, bezw. 5. eine geg. Kugelfläche nach einem Kreis von geg. Halbmesser. Zwei oder drei der Bedingungen können auch derselben Art sein.
28. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die einen geg. Kreis berührt. (Ziehe vom Schnittpunkt der Geraden und der Ebene des Kreises eine Tangente an letzteren.)
29. Eine Kugel zu bestimmen, die eine geg. Kugel und eine geg. Ebene berührt, wenn der Berührungspunkt a) mit der Kugel, b) mit der Ebene gegeben ist.
30. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die von zwei geg. Punkten geg. Entfernungen hat, oder: durch einen Punkt eine Tangentialebene an zwei geg. Kugeln zu legen. Vergl. 231). Sonderfall: Punkt im Unendlichen.
31. Eine Ebene zu bestimmen, die von drei geg. Punkten geg. Entfernungen hat.
32. In einer von zwei geg. sich schneidenden Geraden einen Punkt zu bestimmen, der von der anderen geg. Geraden und einem geg. Punkt gleichweit absteht.
33. Parallel einer geg. Ebene eine Berührungsebene an eine Kugel zu legen. (Lot vom Mittelpunkt auf die Ebene.)
34. Zieht man in zwei beliebigen Kugeln parallele Halbmesser, so geht die Verbindungsgerade der Endpunkte durch einen der Aehnlichkeitspunkte, durch den äußeren, wenn die Parallelen im selben Sinne gezogen sind, anderenfalls durch den inneren.
35. Zieht man durch einen Aehnlichkeitspunkt S zweier Kugeln Strahlen, welche auf den Kugeln die ähnlich liegenden Punkte X und X', Y und Y' u. s. f. bestimmen, so ist die Rechtecksfläche $SX \cdot SX' = SY \cdot SY'$ unveränderlich.
36. Werden drei Kugeln von einer vierten berührt, so geht die durch die drei Berührungspunkte gelegte Ebene durch eine der vier Aehnlichkeitsachsen der drei geg. Kugeln und zwar durch die äußere oder eine der inneren, je nachdem die drei Berührungen gleichartig sind oder nicht.
37. Eine Kugel zu bestimmen, so daß ihr Mittelpunkt auf einer geg. Geraden liegt, ihre Fläche eine geg. Ebene berührt und durch einen geg. Punkt geht.
38. Eine Kugelfläche zu bestimmen, welche durch drei geg. Punkte geht und eine geg. Kugelfläche berührt. Vergl. 222).

39. Eine Kugelfläche zu bestimmen, welche durch zwei geg. Punkte geht und a) zwei Ebenen, b) zwei geg. Kugeln, c) eine geg. Kugel und eine geg. Ebene berührt.
40. Durch einen geg. Punkt einer geg. Ebene oder parallel einer Geraden eine Gerade zu ziehen, so daß die Berührungsebenen, welche durch diese Gerade an zwei auf derselben Seite der Ebene geg. Kugeln gelegt werden, gegen die geg. Ebene gleich geneigt sind. (Benütze die zu einer der Kugeln symmetrische bezüglich der geg. Ebene.)
41. Eine Ebene zu bestimmen, welche durch einen geg. Punkt geht, von einem geg. Punkt einen geg. Abstand hat und eine geg. Kugel nach einem geg. Kreis schneidet.
42. Eine Ebene zu bestimmen, die von zwei geg. Punkten ein geg. Abstandsverhältnis hat und gegen drei geg. Gerade gleich geneigt ist.
43. Eine Ebene zu bestimmen, die von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten geg. Abstandsverhältnisse hat. Vergl. Sonderfall 104) Aufg. 20. Anzahl der Lösungen?
44. Eine Kugel zu bestimmen, die zwei geg. Kugeln rechtwinklig schneidet und zwei geg. Ebenen berührt.
45. Eine Kugelfläche zu bestimmen, die durch einen geg. Punkt geht und drei geg. Ebenen berührt. Anzahl der Lösungen?
46. Eine Kugel zu bestimmen, die durch einen geg. Punkt geht und drei geg. Kugeln rechtwinklig schneidet. Betrachte den Punkt als Grenzfall einer Kugel.
47. Wo liegen die Schnittgeraden der Ebenen der Kugelkreise, nach welchen zwei geg. Kugeln von beliebigen dritten Kugeln geschnitten werden?
48. Wo liegen die Mitten aller gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kugeln?
49. Gegeben eine Kugel, eine Ebene und eine Strecke. Gesucht eine Kugel, welche die geg. Strecke zum Halbmesser und mit der geg. Kugel die geg. Ebene zur Potenzebene hat.
50. Gegeben zwei Kugeln und ein beliebiger Punkt. Gesucht eine Kugel durch diesen Punkt, so daß alle drei Kugeln eine gemeinsame Potenzebene haben. Zwei Fälle: Die geg. Kugeln schneiden sich oder schneiden sich nicht.

    Die Gesamtheit aller Kugeln, die mit einer geg. Kugel dieselbe Potenzebene haben, heißt Kugelbüschel. Wo liegen die Mittelpunkte eines Büschels?
51. Eine Kugel zu bestimmen, die eine geg. Ebene berührt und mit zwei geg. Kugeln zu demselben Büschel gehört. Erster Fall, die Kugeln schneiden sich; zweiter Fall, sie schneiden sich nicht.
52. Eine Kugel zu bestimmen, die drei geg. Kugeln rechtwinklig schneidet und eine geg. Ebene berührt.

    Bestimme die Potenzachse der drei Kugeln und beschreibe zwei beliebige Kugeln K_1 und K_2, welche die geg. Kugeln rechtwinklig schneiden. Ermittle nach Aufgabe 51 diejenige Kugel des Kugelbüschels $K_1 K_2$, welche die geg. Ebene berührt.

53. Eine Kugel zu bestimmen, die durch einen geg. Punkt geht, zwei geg. Kugeln rechtwinklig und eine dritte geg. Kugel nach einem Großkreis schneidet.
54. Eine Kugelfläche so durch einen geg. Punkt zu legen, daß sie zwei geg. Kugeln nach Großkreisen und eine dritte rechtwinklig schneidet.
55. Eine Kugel zu bestimmen, die durch einen geg. Punkt geht und eine geg. Kugel in einem geg. Punkt berührt.
56. Eine Kugel zu bestimmen, die eine geg. Kugel in einem geg. Punkt und eine zweite geg. Kugel berührt.
57. Eine Kugel zu bestimmen, die drei geg. Ebenen und eine geg. Kugel berührt.
58. Sucht man zu sämtlichen Punkten einer Geraden g die Polarebenen, so gehen diese sämtlich durch eine zweite Gerade g′, die Polargerade zu g und umgekehrt. Welche Lage haben die Geraden zu einander? Welche Lage haben die Schnittpunkte einer die Geraden schneidenden Kugelsekante?
59. Eine Kugel zu bestimmen, welche durch zwei geg. Punkte geht und 1. eine geg. Ebene und eine geg. Kugel berührt, 2. zwei geg. Kugeln berührt.
60. Die Aehnlichkeitspunkte von vier Kugeln liegen achtmal zu je sechs in einer Ebene. (Aehnlichkeitsebenen.)

VI. Abschnitt.

Umdrehungsflächen.

Im Gegensatz zur Ebene sind alle anderen Flächen gekrümmt. Die einfachsten Krümmungsverhältnisse zeigen die Umdrehungs- oder Rotationsflächen.

Erzeugung.

238. Jede mit einer unbeweglichen Geraden starr verbundene stete Linie, die sogen. Erzeugende, beschreibt bei der Umdrehung um die Gerade als Achse eine Umdrehungsfläche. Hieraus folgt:

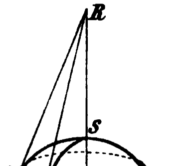
Erster Hauptsatz: Jeder Punkt der Erzeugenden beschreibt mit seinem Abstand von der Drehachse als Halbmesser einen Kreis, dessen Ebene zur Achse senkrecht steht.

Oder: Alle zur Achse senkrechten ebenen Schnitte einer Umdrehungsfläche sind Kreise, sogen. Parallelkreise.

Zweiter Hauptsatz: Alle durch die Drehachse gelegten Ebenen schneiden die Umdrehungsfläche nach kongruenten Linien, den sogen. Achsenschnitten oder Meridianen.

Nur im Fall die Erzeugende eben ist und die Achse in ihrer Ebene liegt, ist sie zugleich Achsenschnitt; ist anderenfalls: a) die Erzeugende eben, aber die Achse außerhalb ihrer Ebene, b) die Erzeugende räumlich oder „doppelt" gekrümmt, d. h. verläuft sie nicht in einer Ebene, so sind Erzeugende und Achsenschnitt verschieden.

Fig. 132.



Berührung.

239. Die Berührungsebene einer beliebigen Fläche hat die Eigenschaft, daß jede durch ihren Berührungspunkt P gelegte Schnittebene die Fläche nach einer Kurve und die Berührungsebene nach der Tangente an diese Kurve in P schneidet. Insbesondere schneidet die Berührungsebene einer Umdrehungsfläche die durch den Berührungspunkt gehenden Ebenen des Meridians und Parallelkreises nach den Tangenten in jenem Punkt an diese Linien, somit

Satz: Die Berührungsebene in einem Punkt einer Umdrehungsfläche ist bestimmt durch die beiden Tangenten in jenem Punkt an den dem Punkt zugehörigen Meridian und Parallelkreis.

Die einfachsten Umdrehungsflächen.

240. Es seien hier nur diejenigen Flächen betrachtet, die von den einfachsten Erzeugenden, der Geraden und dem Kreis, beschrieben werden. Man hat folgende Möglichkeiten:

a) Achse mit der Erzeugenden in einer Ebene

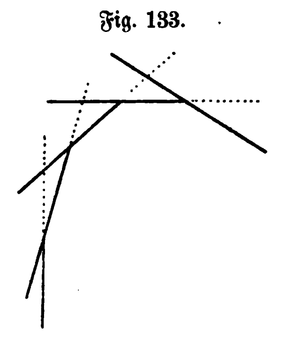
1. zur erzeugenden Geraden parallel . . . Cylinderfläche
2. dieselbe im Endlichen schneidend . . . . Kegelfläche
3. durch den Mittelpunkt des erzeugenden Kreises Kugel
4. außerhalb desselben . . . . Wulst

b) Achse mit der Erzeugenden nicht in einer Ebene

5. zur erzeugenden Geraden windschief
Einmanteliges Drehungshyperboloid
6. zur Kreisebene parallel . . . . . . Wulst oder Wulstring
7. zur Kreisebene beliebig geneigt . . . Wulst oder Wulstring
8. zur Kreisebene senkrecht . . . . . . Kreis oder Kreisring.

Regelflächen.

241. Alle Flächen, die von einer nach irgend welchem Gesetz sich stetig bewegenden Geraden als Erzeugenden beschrieben werden, heißen Regelflächen


Fig. 133.

(regula die Gerade). Auf ihnen läßt sich somit eine durch das Bewegungsgesetz beschränkte, unendliche Schar von Geraden ziehen. Ist die Bewegung eine solche, daß die stetig aufeinander folgenden Lagen der Erzeugenden sich schneiden, so besteht die Fläche aus unendlich vielen, unendlich schmalen, sich stetig aneinander reihenden ebenen Flächenstreifen, sogen. Flächenelementen. Wird daher die Regelfläche nach irgend einer Erzeugenden aufgeschnitten, so kann man, mit dem ersten Flächenelement beginnend, jedes in die Ebene des nächst benachbarten umklappen, d. h. die ganze gekrümmte Regelfläche läßt sich in eine Ebene ausbreiten: Die Regelfläche ist abwickelbar (developpabel).

Ist dagegen jede Lage der Erzeugenden zur nächstfolgenden windschief, so ist die Regelfläche nicht abwickelbar. Eine solche windschiefe Regelfläche verhält sich wie eine reine Kurvenfläche, d. h. wie eine durch stete Bewegung einer Kurve entstandene Fläche.

Demgemäß sind abwickelbar die Cylinder- und Kegelfläche, windschief dagegen das einmantelige Drehungshyperboloid.

Abwicklung. Konforme Abbildung.

242. Da bei dem beschriebenen Vorgang der Abwicklung der Winkel je zweier unendlich benachbarter Erzeugenden sich nicht ändert und jede beliebige, auf der Regelfläche verzeichnete Kurve als ein Zug von unendlich vielen, unendlich kleinen, in den einzelnen Flächenelementen liegenden, sich stetig folgenden Sehnen, sogen. Kurvenelementen, angesehen werden kann, die in ihren Verlängerungen die Tangenten der Kurve bilden, so folgt, daß jedes von zwei unendlich benachbarten Erzeugenden und einem Kurvenelement eingeschlossene, unendlich schmale Dreieck sich als ein kongruentes abwickelt. Da ferner jeder Schnittpunkt zweier beliebiger Kurven der Fläche als in einem Flächenelement liegend betrachtet werden kann, so ist der Winkel der abgewickelten Kurven, der sogen. Verwandelten, derselbe wie derjenige der Kurven auf der Fläche selbst. Jedes von drei beliebigen Kurvenelementen eingeschlossene dreieckige Flächenelement wickelt sich daher als kongruentes Flächenelement ab, und da die ganze Fläche aus unendlich vielen derartigen unendlich kleinen Flächenelementen zusammengesetzt gedacht werden kann, so folgt

Satz: Die Abwicklung der Regelfläche ist das winkel-, längen- und flächentreue Abbild der Fläche,

d. h. jeder Winkel, jeder Kurvenbogen und jedes von beliebigen Kurvenbögen begrenzte Flächenstück erscheint in der Abwickelung als ebenso großer Winkel, ebenso langer Bogen und ebenso großes Flächenstück. Die räumlich gekrümmte Fläche ist bildlich durchaus treu und nicht etwa perspektivisch ver-

kürzt in der Ebene dargestellt, so daß ihre räumlichen Verhältnisse unmittelbar dem ebenen Bild in wahrer Größe entnommen werden können.

Ist die Fläche nicht abwickelbar, so ist es nicht mehr möglich, ein derart übereinstimmendes Bild derselben zu entwerfen. Damit z. B. das Bild wenigstens noch in gewissem Sinn der Fläche ähnlich wird, hat man die Eigenschaft der Winkeltreue zu erhalten, d. h. ein Verfahren zu suchen, durch welches jedes beliebige, unendlich kleine, dreieckige Flächenelement als ähnliches Dreieckchen in die Bildebene übertragen wird. Siehe Kugelabbildungen.

Winkeltreue Abbildungen bezeichnet man auch als konform oder isogonal, flächengleiche als äquivalent.

Die Cylinderfläche.

Senkrechter Kreiscylinder.

243. Dreht sich eine Gerade um eine zu ihr parallele feste Gerade als Achse, ohne ihren Abstand r von letzterer zu ändern, so beschreibt sie die Mantelfläche eines senkrechten Kreiscylinders. Fig. 134. Hieraus folgt:

Satz: Alle zur Achse senkrechten Ebenen schneiden die Cylinderfläche nach gleichen Kreisen, sogen. Grundkreisen, vom Halbmesser r. (Vergl. 238. 1.)

Hiernach die Bezeichnung senkrechte Kreiscylinderfläche. Ferner folgt

Satz: Jede durch die Achse gelegte oder ihr parallele Ebene im Abstand $< r$ schneidet die Cylinderfläche nach zwei parallelen Erzeugenden oder Mantellinien. (Vergl. 238. 2.)

Satz: Die senkrechte Kreiscylinderfläche ist Ort aller Punkte, die von einer geg. Geraden eine geg. Entfernung haben.

244. Meist wird die Cylinderfläche durch zwei Grundkreisebenen abgegrenzt. Man denkt sich dann den Cylinder auch dadurch erzeugt, daß

1. eine zur Ebene eines Kreises senkrechte Gerade, sich selbst parallel, dem Kreis, der sogen. Leitlinie, entlang gleitet,
2. ein Rechteck um eine seiner Seiten als Achse sich dreht. Welche Seite beschreibt den Mantel?

245. Um den Schnitt einer Geraden mit der Cylinderfläche zu bestimmen, hat man diejenigen Mantellinien aufzusuchen, welche die geg. Gerade schneiden, mit ihr also in einer Ebene liegen. Diese Ebene ist parallel zur Achse. Schneidet sie die Ebene des Grundkreises

1. nach einer Sehne, so bestimmen die durch deren Endpunkte gezogenen Mantellinien zwei Schnittpunkte. Fig. 134. Fig. 134a in Horizontal- und Vertikalprojektion,

2. nach einer Tangente an den Grundkreis, so fallen die Mantellinien und somit auch beide Schnittpunkte zusammen: Die Ebene wird zur Berührungsebene und die geg. Gerade zur Cylindertangente. Fig. 134 b,
3. nach einer Geraden außerhalb des Grundkreises, so schneidet die geg. Gerade die Cylinderfläche nicht. Somit

Fig. 134.

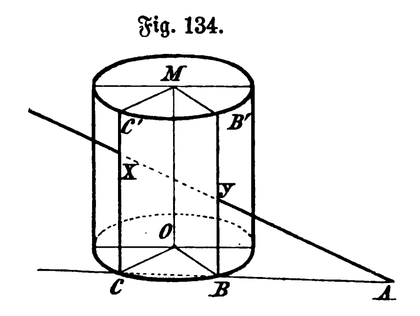
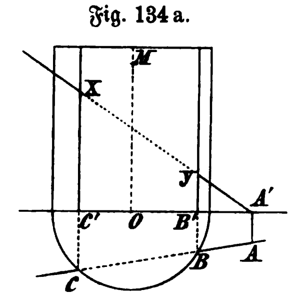
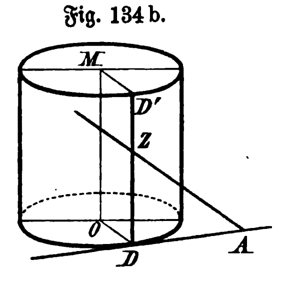


Fig. 134 a.



Satz: Die Berührungsebene einer Cylinderfläche ist parallel der Achse, berührt die Fläche längs einer Mantellinie und schneidet die Ebene des Grundkreises nach einer Tangente, durch deren Berührungspunkt die Berührungsmantellinie geht (vergl. 239).

Fig. 134 b.



Satz: Alle Geraden einer Berührungsebene berühren die Cylinderfläche in ihren Schnittpunkten mit der Berührungsmantellinie.

Satz: Alle Ebenen bezw. Geraden, die von einer geg. Geraden eine geg. Entfernung haben, berühren eine senkrechte Kreiscylinderfläche, welche die geg. Gerade zur Achse und die geg. Entfernung zum Grundkreishalbmesser hat,

oder: Die senkrechte Kreiscylinderfläche ist Ort für alle Ebenen bezw. Geraden, die von einer geg. Geraden (Achse) eine geg. Entfernung (Halbmesser) haben.

Schiefer Kreiscylinder.

246. Gleitet eine Gerade von beliebiger Richtung sich selbst parallel dem Umfang eines Kreises entlang, so beschreibt sie eine schiefe Kreiscylinderfläche. Die zur Erzeugenden parallele Gerade durch den Mittelpunkt des Grundkreises heißt Achse. Da, wegen der zur Achse schiefen Lage des Grundkreises, aufeinander folgende Punkte des letzteren und somit auch aufeinander folgende Mantellinien verschiedene Entfernung von der Achse haben, so geht eine Mantellinie durch Drehung um die Achse, weil sie hiebei ihre Entfernung von dieser nicht ändert, nicht in die Lage der benachbarten Mantellinie über, die schiefe Kreiscylinderfläche läßt sich somit nicht in sich selbst verschieben: sie ist keine Umdrehungsfläche.

Aus der Art der Erzeugung folgt der

Satz: Die schiefe Kreiscylinderfläche ist Ort aller Punkte, die von einer geg. Geraden (Achse) eine zu einer geg. Ebene (Grundkreisebene) parallele geg. Entfernung (Halbmesser r) haben.

247. Die schiefe Kreiscylinderfläche wird von jeder, der Achse oder den Mantellinien parallelen Ebene a) nach zwei Mantellinien geschnitten, b) berührt, c) nicht geschnitten, je nachdem diese Ebene die Grundkreisebene nach a) einer Sehne, b) einer Tangente, c) einer außerhalb des Grundkreises liegenden Geraden schneidet.

Symmetrie. Wechselschnittkreise.

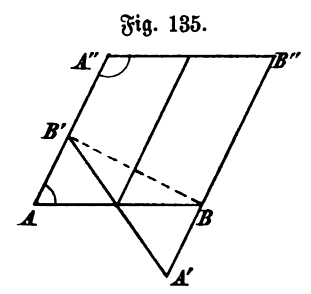
248. Die Betrachtung der Achsenschnitte ergiebt,

1. der zur Grundkreisebene senkrechte Achsenschnitt bestimmt den Neigungswinkel der Achse,
2. der senkrechte Achsenschnitt und der gegen ihn um 90° gedrehte sind die beiden Symmetrieebenen der Fläche,
3. die Achse ist zugleich Symmetriegerade der Fläche.

Macht daher die schiefe Kreiscylinderfläche eine halbe Umdrehung von 180° um die Achse, so deckt sich die neue Lage mit der ursprünglichen, denn jede Mantellinie geht in die ihr symmetrische über. Dabei gelangt der Grundkreis in eine neue, bezüglich der zweiten Symmetrieebene symmetrische Stellung, somit

Satz: Die schiefe Kreiscylinderfläche besitzt zwei Parallelenscharen von Kreisschnitten mit gemeinschaftlichem senkrechten Achsenschnitt: Grundkreise und Wechselschnittkreise, deren Mittelpunkte auf der Achse liegen.

Fig. 135.



249. Da irgend zwei nicht parallele Kreisschnitte vom senkrechten Achsenschnitt nach Durchmessern geschnitten werden, die mit den Erzeugenden des Achsenschnitts ein Kreisviereck A'B'A''B'' bilden,

weil $\sphericalangle A'' + \sphericalangle A = 180°$, aber $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$

somit $\sphericalangle A'' + \sphericalangle A' = 180°$

so folgt, wenn der Umkreis dieses Vierecks sich um irgend einen seiner Durchmesser dreht:

Satz: Durch je zwei nicht parallele Kreisschnitte der schiefen Kreiscylinderfläche läßt sich eine Kugel legen.

Mantel des senkrechten Kreiscylinders.

250. Jede Erzeugende bildet mit der unendlich benachbarten, ihr parallelen, ein ebenes Flächenelement, die Cylinderfläche ist daher abwickelbar (241). Da sämtliche Mantellinien in den Punkten der Grundkreise auf deren Ebenen senkrecht sind und Winkeltreue besteht (242), so ist die Abwickelung der Mantelfläche M

eines durch zwei Grundkreisebenen im Abstand h senkrecht oder „gerade" begrenzten Kreiscylinders ein Rechteck, dessen eine Seite die Mantellinie oder Cylinderhöhe h, dessen andere Seite der zur Geraden gewordene Umfang $2\pi r$ des Grundkreises ist, somit

$$M = 2\pi r h$$

und, wenn Grund- und Deckkreis hinzutreten, die Gesamtoberfläche O des senkrechten Kreiscylinders

$$O = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Mantel des schiefen Kreiscylinders.

251. Die Abwicklung der nach der Mantellinie B C des senkrechten Achsenschnittes aufgeschnittenen Mantelfläche des durch die Länge s der Achse, ihre Neigung α gegen die Grundkreisebene und den Halbmesser r des Grundkreises geg. schiefen Kreiscylinders ist ein Flächenstreifen, begrenzt von den beiden Parallelen $B'C' = B''C'' = s$, in welche B C zerfällt, und den beiden parallelen, stetig gekrümmten Verwandelten der Grundkreise von der Länge des Umfangs $2\pi r$ dieser Grundkreise. Die Grundkreise wickeln sich nicht mehr als Geraden ab, da

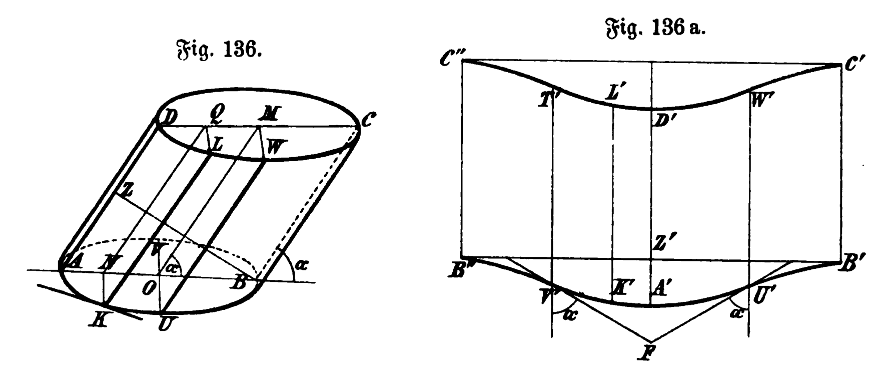


Fig. 136. Fig. 136 a.

sie die parallelen Mantellinien nicht unter unveränderlichem Winkel schneiden. Die Parallele A'D' im mittleren Abstand von B'C' und B''C'' ist gegen diese um die Kathete $A'Z' = AZ = \cos\alpha \, . \, 2r$ eines durch Hypotenuse 2r und einen spitzen Winkel $\sphericalangle\, \alpha$ bestimmten rechtwinkligen Dreiecks A Z B in der Richtung der Mantellinien verschoben. A'D' ist Symmetriegerade der Verwandelten. Wie die Grundkreise, so schneiden auch ihre Verwandelten nach dem Gesetz der Winkeltreue 242) die Parallelen B'C', B''C'', A'D' rechtwinklig und die, $\frac{1}{4}$ bezw. $\frac{3}{4}$ der Fläche abschneidenden Parallelen $U'W' = V'T' = s$ in Wendepunkten unter $\sphericalangle\, \alpha$, da die Winkel der Grundkreistangenten und Mantellinien auf dem Weg $BU = B'U'$ von 90° bis α abnehmen, auf dem Weg $UA = U'A'$ von α wieder auf 90° anwachsen. Der Winkel, den die Tangente der Verwandelten in einem beliebigen Punkt K derselben mit der zugehörigen Mantellinie K L bildet, ergiebt sich als dritte Seite eines durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bestimmten Dreikants K — P L N. Fällt man $KN \perp AB$ und zieht in K die Kreis-

tangente KP, so sind $\sphericalangle NKL = 90^\circ$ und $\sphericalangle NKP$ die bekannten Seiten, ihr eingeschlossener Winkel $\sphericalangle QNB = \alpha$.

Der Abstand B'B'' der die Abwickelung begrenzenden Mantellinien hat die Länge des Umfangs einer Ellipse, welche als Schnitt des Cylinders mit einer zu den Mantellinien senkrechten sogen. Querschnittsebene entsteht, läßt sich somit nur mit Hilfe elliptischer Funktionen ermitteln. Die Halbachsen der Ellipse sind

$$\frac{1}{2} BZ = \sin \alpha \,.\, r \text{ und } OU = r.$$

251a. Die Mantelfläche des schiefen Kreiscylinders kann betrachtet werden als Summe der unendlich vielen, unendlich schmalen Parallelogramme, welche die sich stetig folgenden, unendlich benachbarten Mantellinien aus der Mantelfläche ausschneiden. Sämtliche Parallelogramme haben dieselbe Grundseite, eben die Mantellinie, und die Summe ihrer unendlich kleinen Höhen giebt den Umfang des zu den Mantellinien senkrechten Querschnitts, daher

Satz: Die Mantelfläche des schiefen Kreiscylinders berechnet sich als Produkt aus der Mantellinie und dem Umfang des Querschnitts,

oder: Die Mantelfläche M des schiefen Kreiscylinders ist gleich derjenigen eines über dem Querschnitt errichteten senkrechten Cylinders, der die Mantellinie des schiefen zur Höhe hat:

$$M = B'B'' \,.\, s$$

Der Satz gilt allgemein für jede beliebige, von zwei parallelen und somit kongruenten Grundkurven begrenzte Cylinderfläche.

Die Schraubenlinie.

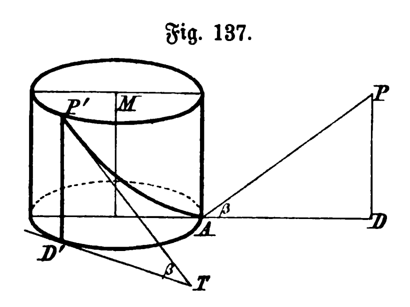
252. Sie ist diejenige Kurve der Cylinderfläche, welche mit sämtlichen Mantellinien gleiche Winkel bildet und sich daher als Gerade abwickelt. Hieraus folgt

Satz: Die Schraubenlinie ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte der Cylinderfläche.

Ist der Winkel 0, so wird die Schraubenlinie zur Mantellinie, ist er gleich 90°, so wird die Schraubenlinie eine ebene Kurve.

253. Wird das rechtwinklige $\triangle ADP$ so auf die senkrechte Kreiscylinderfläche aufgewickelt, daß die Kathete AD in den Grundkreisbogen AD' übergeht, so wird die andere Kathete PD zur Mantellinie P'D' und die Hypotenuse AP zur Schraubenlinie AP', die den kürzesten Weg von A nach P' auf der Cylinderfläche darstellt. $\sphericalangle PAD = \beta$ heißt die Steigung der Schraubenlinie. Wird AD gleich dem Umfang $2\pi r$ des Grundkreises, so kommt D' in den Anfangspunkt A und P fällt in einen Punkt H der Mantellinie durch A. Die Schraubenlinie hat sich somit einmal

Fig. 137.



um den Cylinder gewunden: sie hat, wie man sagt, einen Schraubengang zurückgelegt und ist hierbei um $AH = tg\beta . 2\pi r$, die sogen. Höhe des Schraubengangs, gestiegen. Die Länge AH des Schraubengangs berechnet sich aus $\Delta ADP(H)$ zu

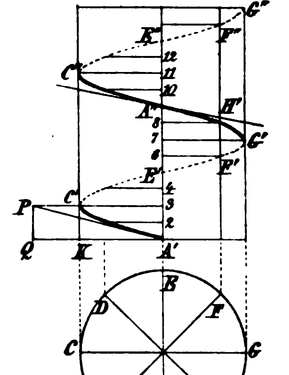
$$AH = \frac{AD}{\cos\beta} = \frac{2\pi r}{\cos\beta}$$

Verlängert man die Hypotenuse AP nach beiden Seiten und wickelt auf, so reiht sich Schraubengang an Schraubengang:

Die Schraubenlinie ist eine räumlich oder „doppelt" gekrümmte Kurve, die sich in der Richtung der Achse ins Unendliche erstreckt.

Die Schraubenlinie in Fig. 137a ist gezeichnet nach dem

Fig. 137 a.



Gesetz: Zu gleichen Drehungen gehören gleiche Erhebungen. $C'C'' = A'A'' = \ldots$ ist die Schraubenhöhe, $A'C'E'G'H'A''$ ein Schraubengang.

$$A'Q = \text{Bogen } AC = \frac{1}{4} . 2\pi r$$

$$\text{und } PQ = \quad C'K \quad = \frac{1}{4} C'C''$$

als Katheten bestimmen das erzeugende rechtwinklige Dreieck $\Delta A'QP$. Daher ist A'P Tangente in A' und giebt die Richtung der Wendetangenten in A'', A''' ...; die zu A'P bezüglich der Mantellinie A'A'' symmetrische Gerade giebt die Richtung der Wendetangenten in den Punkten E', E'' ...

Je nachdem bei der Bewegung in einer Schraubenlinie von oben nach unten die Achse zur Linken oder zur Rechten liegt, heißt die Schraubenlinie links- oder rechtsgängig; vergl. die Bewegung des Uhrzeigers.

Die scheinbare tägliche Bewegung der Sonne erfolgt in einer Schraubenlinie von so niederer Schraubenhöhe, daß die einzelnen Schraubengänge, die Tagesbahnen der Sonne, mit Kreisen verwechselt werden dürfen, ohne einen großen Fehler zu begehen.

254. Aus der Eigenschaft, daß die Kurventangente zwei unendlich benachbarte Punkte der Kurve verbindet, folgt, daß die in P' an die Schraubenlinie gezogene Tangente zugleich Tangente an den Cylinder ist. Sie liegt daher in der, durch die Mantellinie P'D' gelegten Berührungsebene des Cylinders und trifft somit die Grundkreisebene in einem Punkt T der Grundkreistangente D'T. Da P'T als Tangente denselben Winkel $\sphericalangle 90 - \beta$ mit der Cylindermantellinie P'D' bildet, wie die Schraubenlinie P'A selbst, so folgt

$$\Delta P'D'T \cong \Delta PDA \text{ somit } D'T = AD$$

Aus diesen Angaben ergiebt sich die Figur der Tangente in jedem beliebigen Punkt der Schraubenlinie. Fig. 137.

255. Die Fläche, die von einer gleichzeitig längs Schraubenlinie und Cylinderachse hingleitenden und dabei stets zu einer geg. Ebene, etwa der Grundkreisebene, parallelen Geraden beschrieben wird, heißt Schraubenfläche. Da zwei unendlich benachbarte Lagen der Erzeugenden sich nicht schneiden, so gehört die Fläche zu den nicht abwickelbaren Regelflächen. Wendeltreppe.

Beispiele.

256. 1. Aufgabe: Durch einen geg. Punkt P außerhalb einer geraden oder schiefen Kreiscylinderfläche eine Berührungsebene an dieselbe zu legen.

Lösung: Die Achsenrichtung ist eine allen Berührungsebenen gemeinsame Hauptausdehnung. Ziehe daher durch P zur Achse die Parallele PA, welche die Ebene des Grundkreises in A trifft. Die Tangenten von A an den Grundkreis bestimmen mit PA die beiden gesuchten Ebenen.

257. 2. Aufgabe: Eine senkrechte Kreiscylinderfläche zu beschreiben, so daß von zwei geg. windschiefen Geraden die eine zur Achse, die andere zur Tangente wird.

Lösung: Die kürzeste Entfernung der windschiefen Geraden ist der Halbmesser des Grundkreises. Eine Parallele zur Achse in diesem Abstand erzeugt durch Drehung um die Achse die gesuchte Cylinderfläche.

258. 3. Aufgabe: Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, die von zwei beliebigen geg. windschiefen Geraden geg. Entfernungen hat.

Die Schnittgeraden der Berührungsebenen von dem geg. Punkt an die um die geg. Geraden als Achsen mit den geg. Entfernungen als Grundkreishalbmessern beschriebenen Cylinderflächen sind die gesuchten Lösungen. Möglichkeiten?

259. 4. Aufgabe: Gegeben eine Ebene, zwei windschiefe Gerade und ein Punkt. Durch den Punkt eine die Geraden berührende senkrechte Kreiscylinderfläche zu legen, so daß die geg. Ebene Grundkreisebene wird.

Lösung: Projiziere die Geraden und den Punkt senkrecht auf die Ebene, so ist in dieser noch die Aufgabe zu lösen: Einen Kreis zu zeichnen, der zwei Gerade, die Projektionen der geg. Geraden, berührt und durch einen Punkt, die Projektion des geg. Punkts, geht.

260. 5. Aufgabe: Auf einer geg. Geraden h einen Punkt zu bestimmen, der von einer zweiten geg. Geraden g eine geg. Entfernung hat.

Lösung: Beschreibe um g als Achse mit der geg. Entfernung als Halbmesser einen senkrechten Kreiscylinder und bestimme die Schnittpunkte desselben mit h. Fälle von diesen Punkten mit Hilfe der entsprechenden parallelen Grundkreishalbmesser die Lote auf die Achse.

261. 6. Aufgabe: Gegeben vier windschiefe Gerade. Eine derselben sich selbst parallel so zu verschieben, daß sie von den drei anderen gleiche kürzeste Entfernungen hat.

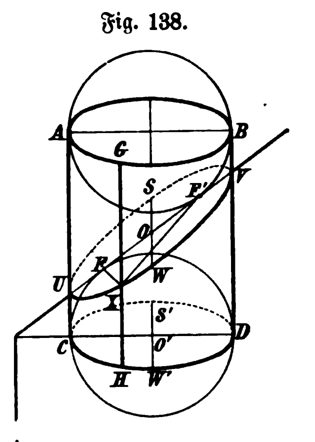
Lösung: Die zu verschiebende Gerade muß die Achse eines senkrechten Kreiscylinders werden, der von den drei anderen Geraden berührt wird. 259). 71). Vier Lösungen.

Beliebige ebene Schnitte des senkrechten Kreiscylinders.

262. Schiebt man in einen senkrechten Kreiscylinder zwei gleiche Kugeln vom Grundkreishalbmesser r, welche die beliebige geg. Schnittebene in F und F' und den Cylindermantel nach den zu den Mantellinien senkrechten Grundkreisen AGB und CHD berühren, so ist für jeden beliebigen Punkt X der Schnittlinie, dessen zugehörige Mantellinie GXH sein möge, nach dem Satz über die Tangenten von einem Punkt an eine Kugel

$$\begin{aligned} XF &= XH \\ XF' &= XG \\ \hline XF + XF' &= GH = AC = \ldots \\ &= \text{konstans} \end{aligned}$$

Fig. 138.



d. h. jeder Punkt der steten und geschlossenen Schnittlinie hat die Eigenschaft, daß die Summe seiner Entfernungen von zwei festen Punkten derselben Ebene sich nicht ändert.

1. Erklärung: Der Ort aller Punkte einer Ebene, welche von zwei festen Punkten derselben Ebene eine unveränderliche Entfernungssumme haben, heißt Ellipse. Die festen Punkte heißen Brennpunkte. Daher

Satz: Der ebene Schnitt einer senkrechten Kreiscylinderfläche ist eine Ellipse.

Ist die Schnittebene senkrecht zur Achse, so fallen die Brennpunkte F und F' zusammen in einen Punkt O und die Ellipse geht in einen Kreis mit Mittelpunkt O über. Der Kreis ist somit ein Sonderfall der Ellipse; die konstante Brennstrahlensumme wäre 2r.

Aufgabe: Eine Ellipse zu zeichnen, welche zwei geg. Punkte zu Brennpunkten und eine geg. Strecke s zur Brennstrahlensumme hat.

Beschreibe mit zwei beliebigen Teilstrecken r und r', deren Summe $r + r' = s$ ist, um F und F' Kreise, die sich in vier Punkten treffen. Eine größere Anzahl derart bestimmter Ellipsenpunkte hat man aus freier Hand durch eine stete Linie zu verbinden.

Die Ellipse läßt sich nur punktweise zeichnen. Ein mechanisches Hilfsmittel, ähnlich dem Zirkel, um sie in fortlaufendem Zug zu zeichnen, giebt es nicht.

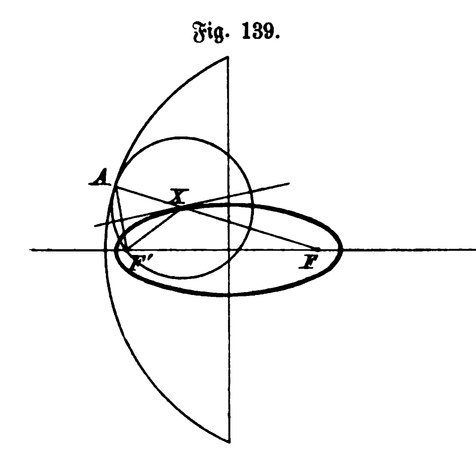
263. Demnach bildet jeder beliebige Ellipsenpunkt X mit den festliegenden Brennpunkten F und F' ein Dreieck von unveränderlichem Umfang $XF + XF' + FF'$, somit

2. Erklärung: Die Ellipse ist Ort der Spitzen aller Dreiecke über derselben Grundseite, die einen geg. Umfang haben.

Hiervon macht man häufig Gebrauch bei der Zeichnung der Ellipse: Die bewegliche Ecke eines um zwei feste Ecken sich drehenden Fadendreiecks, das durch straffes Spannen eines an den Enden verknüpften Fadens erhalten wird, beschreibt eine Ellipse. Herstellung elliptischer Gartenbeete mittels eines um zwei in die Erde gerammte Pfosten geschlungenen Seils.

264. Verlängert man in Fig. 139 den einen Brennstrahl um den anderen, etwa FX um XF' bis A, so berührt der Kreis um X mit XF' denjenigen um F, der die konstante Brennstrahlensumme FA zum Halbmesser hat, im Punkt A der Zentrale FX von innen, somit

Fig. 139.



3. Erklärung: Die Ellipse ist Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einen geg. Kreis berühren und durch einen innerhalb des Kreises geg. Punkt gehen.

Der Mittelpunkt des geg. Kreises und der geg. Punkt sind die Brennpunkte, der Halbmesser des geg. Kreises ist die Brennstrahlensumme.

Hiermit ist z. B. die Aufgabe: Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer durch Brennpunkte und Brennstrahlensumme geg. Ellipse zu bestimmen, ohne die Ellipse zu zeichnen, zurückgeführt auf die Kreisaufgabe: Auf einer geg. Geraden den Mittelpunkt eines Kreises zu bestimmen, der durch einen geg. Punkt F' geht und den um F mit der Brennstrahlensumme beschriebenen Kreis berührt. Mittels des zu F' bezüglich der geg. Geraden symmetrischen Punkts und des Potenzpunkts ergeben sich im allgemeinen zwei Lösungen, daher

Satz: Die Ellipse wird von einer Geraden ihrer Ebene in höchstens zwei Punkten geschnitten.

Zugleich folgt eine einfache Zeichnung der Ellipse: Ziehe in dem um F mit der Brennstrahlensumme beschriebenen sog. Leitkreis beliebige Halbmesser FP, verbinde die Endpunkte P mit F' und errichte zu diesen Verbindungsgeraden PF' die Mittellote. Diese treffen die zugehörigen Halbmesser FP in Punkten der Ellipse und sind zugleich Tangenten in diesen Punkten, gemäß 265).

Tangente der Ellipse.

265. X und X' seien zwei benachbarte, nach dem letzten Verfahren bestimmte Ellipsenpunkte. Kommt X' dem Punkt X' unendlich nahe, so wird die unendlich kleine Ellipsensehne XX' zur Tangente im Punkt X, die Endpunkte

P′ und P der Halbmesser FX′ und FX fallen zusammen, daher auch F′P′ und F′P, sowie deren Mittellote. Das Mittellot zu F′P geht somit durch X und X′, ist also Tangente im Punkte X. Da die Tangente als Höhe des gleichschenkligen Dreiecks F′XP den Winkel an der Spitze halbiert, so folgt

Satz: Die Tangente der Ellipse halbiert den Außenwinkel der Brennstrahlen zum Berührungspunkt.

Eine Ableitung dieses Satzes durch räumliche Betrachtungen am Kegel bezw. Cylinder siehe 330).

Die Gerade, die den Winkel der Brennstrahlen selbst halbiert, steht auf der Tangente und daher auf dem Umfang der Ellipse senkrecht. Sie heißt Normale.

Bedeutung der Normale als Einfallslot: Sämtliche von einer in einem Brennpunkt befindlichen Lichtquelle ausgesandten Strahlen werden am Umfang der Ellipse so gespiegelt, daß sie sich im anderen Brennpunkt vereinigen. Gesetz: Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel. Hieraus erklärt sich die Bezeichnung Brennpunkt (focus).

266. Aufgabe: Von einem geg. Punkt P eine Tangente an eine durch ihre Brennpunkte und Brennstrahlensumme geg. Ellipse zu ziehen.

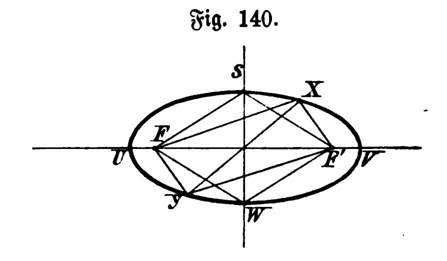
Lösung: Der Kreis um P mit PF′ schneidet den um F beschriebenen Leitkreis in zwei Punkten A und B. Die von P auf F′A und F′B gefällten Lote sind die gesuchten Lösungen. Beweis mittels 265.

Achsen der Ellipse.

267. Sind X und Y zwei Lagen der beweglichen Spitze, für welche die veränderlichen Brennstrahlen ein Parallelogramm FXF′Y bilden, so folgt, da sich die Diagonalen XY und FF′ gegenseitig halbieren

Satz: Alle innerhalb der Ellipse liegenden Strecken durch die Mitte O der Brennweite FF′ werden in diesem Punkt halbiert. Sie heißen daher Durchmesser und der Halbierungspunkt heißt Mittelpunkt der Ellipse.

Fig. 140.



268. Fallen die beweglichen Gegenecken des Parallelogramms FXF′Y nach U und V in die beiderseitigen Verlängerungen von FF′, so geht

$$FY = F'X \text{ über in } FU = F'V$$

und die unveränderliche Seitensumme

$$FX + FY = FV + FU$$
$$= UV$$

deckt sich mit der sonst stets kleineren Diagonale XY. Daher ist UV der größte Durchmesser oder die große Achse der Ellipse.

Man bezeichnet die Länge der großen Halbachse mit a, die Summe der Brennstrahlen ist daher gleich der großen Achse 2a. (= AC gemäß Fig. 138.)

Erreicht die veränderliche Diagonale XY, von einer größten Länge UV an zuerst stetig abnehmend und hierauf wieder stetig wachsend, bei einer Drehung um 180° die alte Länge VU, und umgekehrt, von VU ausgehend, so muß sie in der Mittelstellung 90°, bei welcher das Parallelogramm zum Rhombus mit der Seite a wird, einen kleinsten Wert annehmen. Dieser kleinste Durchmesser SW, das Mittellot zur großen Achse, heißt **die kleine Achse der Ellipse** und ihre Länge wird mit 2b bezeichnet.

269. Der Nachweis eines kleinsten Durchmessers läßt sich auch durch Betrachtung der algebraischen Beziehung erbringen, durch welche die veränderlichen Seiten FX = m und F′X = n des Parallelogramms mit der Brennweite FF′ = 2f und dem Durchmesser XY = 2t verbunden sind. Gemäß (54b) ist

$$4f^2 + 4t^2 = 2(m^2 + n^2)$$

woraus

$$4t^2 = 2(m^2 + n^2) - 4f^2$$

somit $4t^2$ und daher auch t ein kleinster Wert (ein Minimum), wenn $m^2 + n^2$ ein Minimum, da f eine sich nicht ändernde Größe ist. Nun ist aber die Summe $m + n$ der Brennstrahlen und daher auch deren Quadrat $m^2 + n^2 + 2mn$ unveränderlich, somit $m^2 + n^2$ ein Minimum, wenn $m.n$ ein größter Wert (ein Maximum), d. h. m und n müssen als Seiten eines Rechtecks bestimmt werden, das unter allen Rechtecken vom selben Umfang $2(m + n)$ die größte Fläche $m.n$ hat. Dieser Bedingung genügt bekanntlich nur das Quadrat, daher

$$m = n = \frac{FX + F'X}{2} = a$$

und somit die Diagonale SW des Rhombus FSF′W von der Seite a der kleinste Durchmesser.

270. Schon aus der Zeichnung der Ellipse, sodann aus dem Nachweis eines Mittelpunkts ergiebt sich mit Hilfe kongruenter rechtwinkliger Dreiecke

Satz: Die beiden Achsen sind die Symmetriegeraden der Ellipse.

271. Aus △ SOF ergiebt sich zwischen der halben Brennweite f und den Halbachsen a und b die Beziehung

$$a^2 = b^2 + f^2$$

Das Verhältnis der halben Brennweite zur halben großen Achse heißt Exzentrizität ε.

$$\varepsilon = \frac{f}{a} \qquad (< 1)$$

Je größer f, desto größer die Exzentrizität und desto flacher die Ellipse. Für $f = a$ erreicht ε den größten Wert 1, die Ellipse wird zur Geraden (die unbegrenzte große Achse). Je kleiner f, desto kleiner die Exzentrizität und desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreis. Für $f = 0$ erreicht ε den kleinsten Wert 0, die Ellipse wird zum Kreis.

Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen mit sehr kleiner Exzentrizität, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. (Erstes Keplersches Gesetz.)

Die größte Exzentrizität, also eine am meisten vom Kreis abweichende Bahn hat der Planet Mars.

272. Die Symmetrieverhältnisse der Ellipse ergeben sich unmittelbar aus folgenden Betrachtungen am Cylinder (Fig. 138 und 141):

Alle Ebenen durch die Cylinderachse schneiden den Grundkreis sowohl als die Ellipse nach Durchmessern, denn die Cylinderachse ist Mittellinie der Trapeze, die als Achsenschnitte des durch die Ellipse schief abgeschnittenen Cylinders entstehen. Der Schnittpunkt O der Achse mit der Ebene der Ellipse ist daher Mittelpunkt der letzteren.

Eine zur Grundkreisebene parallele Ebene durch O schneidet die Ellipse nach dem Durchmesser SW, der zugleich Grundkreisdurchmesser ist. Er ist die kleine Achse der Ellipse, denn kleiner als der zur Cylinderachse senkrechte Grundkreisdurchmesser kann innerhalb des Cylinders keine die Cylinderachse schneidende Strecke gezogen werden. Genauere Begründung durch Betrachtung rechtwinkliger Dreiecke. Somit

Satz: Die kleine Achse der Ellipse ist gleich dem Grundkreisdurchmesser und läuft parallel der Schnittgeraden der Ebenen der Ellipse und des Grundkreises.

Die Vergleichung der Achsenschnitttrapeze (Fig. 141 und 141a) ergiebt

Satz: Der zur Ebene der Ellipse senkrechte Achsenschnitt schneidet die Ellipse nach der großen Achse

und bestimmt, wenn U'V' sich selbst parallel durch U verschoben wird, ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die große Achse $UV = 2a$ Hypotenuse, eine Kathete gleich dem Grundkreisdurchmesser $U'V' = 2r$ und der von diesen beiden Seiten eingeschlossene Winkel der Keilwinkel $\sphericalangle \alpha$ der Ellipsen- und Grundkreisebene ist, daher

$$2a = \frac{2r}{\cos \alpha}$$

Die beiden zu einander senkrechten Achsenschnitte, welche die Achsen der Ellipse ausschneiden, heißen Hauptachsenschnitte des Cylinders. Sie projizieren die Achsen der Ellipse senkrecht auf eine beliebige Grundkreisebene als zwei zu einander senkrechte Grundkreisdurchmesser.

Aus den Parallelschnitten zu den beiden Hauptachsenschnitten folgt die Symmetrie der Ellipse bezüglich ihrer Achsen.

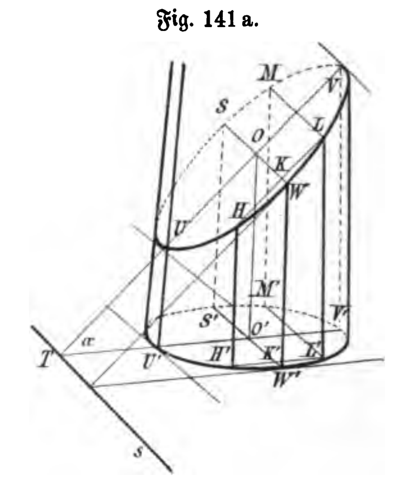
Kreis und Ellipse in Parallelperspektive.

273. Der von der Ebene der Ellipse schief abgegrenzte senkrechte Kreiscylinder wird von der Parallelebenenschar zum Hauptachsenschnitt

a) der kleinen Ellipsenachse SW nach Rechtecken geschnitten, z. B. Rechteck MLL'M'. Die zur kleinen Ellipsenachse parallelen Ellipsensehnen und Halbsehnen projizieren sich daher senkrecht auf eine beliebige Grundkreisebene in wahrer Größe und können als Sehnen bezw. Halbsehnen des Grundkreises betrachtet werden.

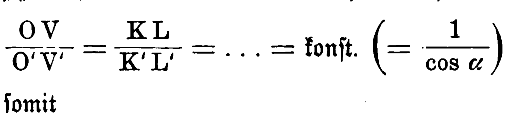
Fig. 141.

Fig. 141 a.



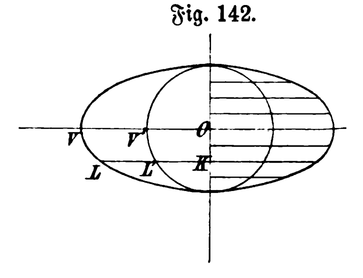
b) der großen Ellipsenachse UV nach Trapezen geschnitten, z. B. Trapez HH'L'L. Denkt man sich die Grundkreisebene parallel durch den Ellipsenmittelpunkt O verschoben, so folgt aus der Aehnlichkeit der entstehenden rechtwinkligen Dreiecke, deren einer spitzer Winkel der Keilwinkel $\sphericalangle\, \alpha$ ist:

Satz: Die zur großen Achse der Ellipse parallelen Sehnen und Halbsehnen stehen zu den Kreissehnen und Halbsehnen, als welche sie sich auf eine beliebige Grundkreisebene senkrecht projizieren, in einem unveränderlichen Verhältnis



$$\frac{OV}{O'V'} = \frac{KL}{K'L'} = \ldots = \text{konst.} \left(= \frac{1}{\cos \alpha}\right)$$

Fig. 142.



somit

Satz: Verlängert man die senkrecht zum Durchmesser eines Kreises gezogene Parallelenschar von Halbsehnen im selben Verhältnis, so entsteht eine Ellipse.

Fig. 142 kann entstanden gedacht werden durch Umklappung der Ellipse um ihre kleine Achse in die durch letztere gelegte Grundkreisebene des Cylinders.

274. Betrachtet man die Mantellinien des senkrechten Kreiscylinders oder, wenn die Ellipse als Grundfläche genommen wird, des schiefen elliptischen Cylinders als projizierende Strahlen, so folgt

Satz: Der Kreis ist die senkrechte Parallelprojektion der Ellipse und letztere die schiefe Parallelprojektion des Kreises.

275. Vergrößert man beide Abstände eines Kreispunkts H' von den zu einander senkrechten Kreisdurchmessern U'V' und SW im selben Verhältnis 1 : n, so ist der neue Punkt H'', dem diese vergrößerten Abstände zugehören, der Endpunkt des im selben Verhältnis vergrößerten Halbmessers OH' und liegt somit

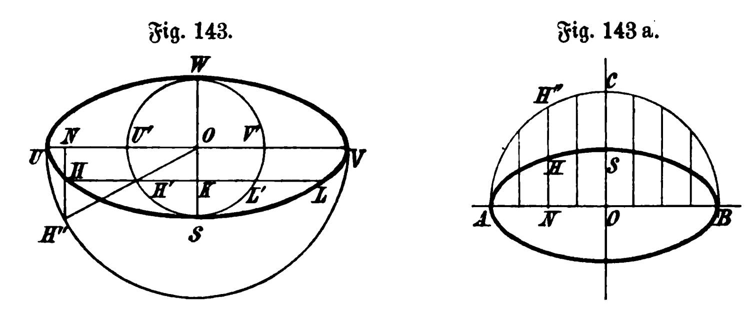


Fig. 143. Fig. 143 a.

auf dem Kreis um O, dessen Halbmesser die große Halbachse OU derjenigen Ellipse ist, deren Punkte durch Vergrößerung der Parallelsehnenschar zu UV im Verhältnis 1 : n erhalten werden. Fällt man daher H''N ⊥ UV und verlängert KH' bis zum Schnitt mit H''N in H, so ist H ein Punkt dieser Ellipse, denn

$$\frac{H'K}{HK} = \frac{H'O}{H''O} = \frac{1}{n}.$$

Da aber

$$\frac{H''N}{HN} = \frac{H''O}{H'O} = \frac{n}{1}$$

so erhält man denselben Punkt H, wenn man die zu UV senkrechte Halbsehne des über der großen Achse UV der Ellipse beschriebenen Kreises im umgekehrten Verhältnis verkleinert, somit (Fig. 143a)

Satz: Verkürzt man die parallelen Halbsehnen eines Kreises im selben Verhältnis, so entsteht eine Ellipse.

Frage: Wo schneiden sich die Sehnen HS und H''C in Fig. 143a?

276. Räumlich wird diese Verkürzung erzeugt, wenn man die Ebene des Kreises um dessen Durchmesser UV als Achse aus der Ebene der Ellipse herausdreht um einen Winkel $\sphericalangle\, \alpha$, der durch das Verhältnis der Achsen der Ellipse bestimmt ist,

$$\cos \alpha = \frac{HN}{H''N} = \frac{H'O}{H''O} = \frac{OS}{OU}$$

dann kommt H'' senkrecht über H zu liegen, somit, da nunmehr Kreis und Ellipse als Schnitte eines und desselben Cylinders betrachtet werden können,

Satz: Die Ellipse ist die senkrechte Parallelprojektion des Kreises, der Kreis die schiefe Parallelprojektion der Ellipse.

Der projizierende Cylinder kann als senkrechter elliptischer oder als schiefer Kreiscylinder betrachtet werden.

277. Leitet man aus einem Kreis K zwei Ellipsen E_1 und E_2 ab, dadurch daß man eine Parallelenschar von Halbsehnen des Kreises im Verhältnis 1 : n und 1 : m vergrößert bezw. verkürzt, so stehen die den Ellipsen E_1 und E_2 zugehörigen Halbsehnen dieser Schar im Verhältnis n : m und man kann sich E_2 und E_1 abgeleitet denken, dadurch daß man die Parallelenschar von Halbsehnen der Ellipse E_1 im selben Verhältnis n : m oder $1 : \frac{m}{n}$ vergrößert bezw. verkürzt, daher

Satz: Verlängert oder verkürzt man die zu einer Achse der Ellipse parallele Schar Halbsehnen im selben Verhältnis, so entsteht wieder eine Ellipse.

278. Stellt man aus einer Ellipse E_1 mittels der Verhältnisse 1 : p und 1 : q zwei neue Ellipsen E_2 und E_3 her und dreht letztere um ihre jeweilige mit E_1 gemeinsame Achse aus der Ebene E_1 um die Winkel $\sphericalangle \alpha$ und $\sphericalangle \beta$, bestimmt durch

$$\cos \alpha = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{1}{q} \quad (p > 1,\ q > 1)$$

so können E_2 und E_3 als ebene Schnitte eines über E_1 errichteten senkrechten elliptischen Cylinders betrachtet werden, oder nimmt man E_2 zur Grundfläche, so ist E_3 ein ebener Schnitt des über E_2 stehenden schiefen elliptischen Cylinders, daher

Satz: Jeder beliebige elliptische Cylinder wird von einer beliebigen Ebene nach einer Ellipse geschnitten oder

Satz: Jede Ellipse projiziert sich parallel wieder als Ellipse.

279. Schneidet man daher einen schiefen elliptischen Cylinder durch eine zu den Mantellinien senkrechte Ebene, bestimmt die Achsen a und b der entstandenen Schnittellipse E, dreht die Ebene derselben um die große Achse nach beiden Seiten von E um einen Winkel $\sphericalangle \alpha$, welcher sich als der von Hypotenuse a und Kathete b eines rechtwinkligen Dreiecks eingeschlossene Winkel aus einer Nebenfigur ergiebt $\left(\cos \alpha = \frac{b}{a}\right)$, so erhält man zwei zu E symmetrische Kreisschnitte, daher

Satz: Jeder beliebige elliptische Cylinder besitzt zwei zur Achse symmetrische Kreisschnitte, d. h. er ist ein Kreiscylinder.

280. Das Hauptergebnis der Untersuchungen 273—279 ist somit ausgesprochen in dem

Satz: Jede beliebige Ellipse kann als Parallelprojektion eines Kreises betrachtet werden.

Beispiele.

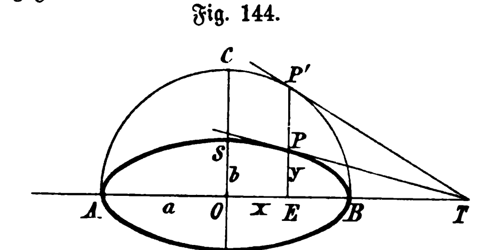
281. 1. Aufgabe: Die Parallelprojektion eines Kreises zu zeichnen, wenn gegeben ist die Affinitätsachse und das Bild P′ eines Kreispunkts P.

Das Verfahren nach den Sätzen der Parallelperspektive liefert eine Ellipse. Da zwei zusammenfallenden Kreispunkten zwei zusammenfallende Ellipsenpunkte entsprechen, so sind die Tangenten in entsprechenden Punkten beider Kurven entsprechende Gerade. Durch Zeichnung der Kreistangente in dem, einem Ellipsenpunkt entsprechenden Kreispunkt ist daher auch die Tangente im Ellipsenpunkt bestimmt. Vgl. Fig. 12 und 147.

282. 2. Aufgabe: In einem geg. Punkt P einer Ellipse die Tangente zu zeichnen.

Das Lot PE ⊥ AB treffe den über der großen Achse AB beschriebenen Halbkreis in P′, dann sind P und P′ parallelperspektiv zugeordnete Punkte. Verbinde daher den Schnittpunkt T der Achse und der in P′ gezeichneten Kreistangente mit P. Fig. 144.

Fig. 144.



283. 3. Aufgabe: Die algebraische Beziehung herzuleiten, die zwischen den Achsenabständen eines Ellipsenpunkts besteht.

Die Achsenabstände des Punkts P der Ellipse seien PE = y und EO = x. Dann ergiebt die Beziehung 275) in Fig. 144:

$$\frac{P'E}{PE} = \left(\frac{CO}{SO}\right) = \frac{a}{b} \text{ quadriert } \frac{P'O^2 - OE^2}{PE^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

oder

$$\frac{a^2 - x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

woraus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Da nur diejenigen Punkte, deren Achsenabstände dieser Bedingung genügen, auf der Ellipse liegen, alle anderen dagegen entweder innerhalb oder außerhalb, so heißt obige allen Ellipsenpunkten gemeinsame Beziehung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ die „Gleichung" der Ellipse.}$$

Leite die Gleichung der Ellipse ab, ausgehend von der Eigenschaft 262. 1.

Parallelogramm mit um- und einbeschriebener Ellipse.

284. Jedes beliebige, der Ellipse umschriebene Parallelogramm ist das parallelperspektive Bild eines dem Kreisschnitt des projizierenden Cylinders umschriebenen Rhombus.

Da ein und dasselbe Parallelogramm als Parallelprojektion unendlich vieler Rhomben betrachtet werden kann, die mit dem Parallelogramm eine Seite gemein haben, jedem dieser Rhomben aber ein anderer einbeschriebener Kreis entspricht, so folgt

Satz: Jedem Parallelogramm lassen sich unendlich viele Ellipsen einbeschreiben.

Grenzfälle sind die beiden Diagonalen.

Zugleich ergiebt die Parallelprojektion:

Die Berührungspunkte einer einem Parallelogramm einbeschriebenen Ellipse sind die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten den Diagonalen des umschriebenen Parallelogramms parallel gehen.

Der Mittelpunkt der Ellipse ist Diagonalschnittpunkt sowohl der um- als der einbeschriebenen Parallelogramme.

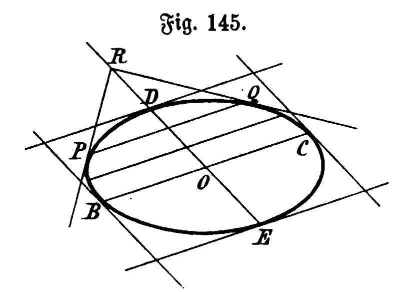
285. Aufgabe: Einem Parallelogramm eine Ellipse einzubeschreiben, die eine Seite AB desselben in einem geg. Punkt P berührt.

Errichte über AB den Rhombus, dessen Inkreis AB in P berührt: Der Halbkreis über AB trifft das Lot in P auf AB im Mittelpunkt des Inkreises. Betrachte Parallelogramm und Ellipse als Parallelprojektion dieses Rhombus und seines Inkreises. AB ist Affinitätsachse. Vergl. Fig. 147.

Konjugierte Durchmesser.

286. Die Mitten paralleler Kreissehnen liegen auf dem zu diesen Sehnen senkrechten Durchmesser. Daher folgt durch Parallelprojektion (Fig. 145)

Fig. 145.



Satz: Die Mitten der zu einem Durchmesser parallelen Ellipsensehnenschar liegen wieder auf einem Durchmesser.

Beide Durchmesser sind die Parallelprojektionen zweier zu einander senkrechter Kreisdurchmesser und heißen daher konjugierte oder zugeordnete Durchmesser der Ellipse. Obiger Satz lautet dann mit anderen Worten:

Satz: Die zu einem Durchmesser parallele Ellipsensehnenschar wird von dem konjugierten Durchmesser halbiert.

Wird die Sehne zur Tangente, so folgt

Satz: Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem zugeordneten Durchmesser parallel.

Oder: Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte zweier paralleler Tangenten ist zugeordneter Durchmesser zu dem den Tangenten parallelen Durchmesser der Ellipse.

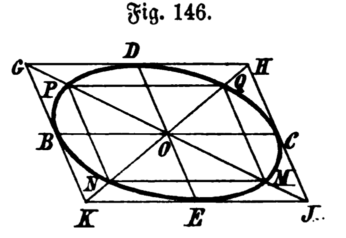
Endlich folgt durch parallelperspektive Uebertragung der entsprechenden Verhältnisse am Kreis

Satz: Die in den Endpunkten einer Ellipsensehne gezogenen Tangenten treffen sich in einem Punkt des der Sehne bezw. ihrem parallelen Durchmesser zugeordneten Durchmessers.

Konjugierten-Parallelogramme.

287. Jedem Kreis lassen sich unendlich viele Quadrate um- bezw. einbeschreiben. Das parallelperspektive Bild jedes dieser Quadrate ist ein einer Ellipse um- bezw. einbeschriebenes Parallelogramm, dessen Seiten konjugierten Durchmessern parallel sind und heißt um- bezw. einbeschriebenes Konjugierten-Parallelogramm der Ellipse. Die Berührungspunkte sind die Mitten der Seiten. Die Ellipse selbst heißt Hauptellipse.

Fig. 146.



Unter allen Ellipsen, die einem Parallelogramm einbeschrieben werden können, ist die Hauptellipse die einzige, für welche das Parallelogramm ein Konjugierten-Parallelogramm ist. Sie hat die größte Fläche, denn nach der einen wie nach der anderen Diagonale des Parallelogramms hin sich verändernd, geht sie in einen kleinsten Wert, die Diagonale selbst, über.

288. Da sämtliche um- bezw. einbeschriebenen Quadrate des Kreises je flächengleich sind und dieselbe Neigung gegen die Bildebene haben, so folgt durch Parallelprojektion

Satz: Sämtliche einer Ellipse um- bezw. einbeschriebenen Konjugierten-Parallelogramme sind je flächengleich.

Gemäß der Begriffsbestimmung konjugierter Durchmesser folgt ferner

Satz: Die Diagonalen der Konjugierten-Parallelogramme sind konjugierte Durchmesser.

Und schließlich durch parallelperspektive Uebertragung der entsprechenden Verhältnisse am Kreis

Satz: Die Schnittpunkte der Diagonalen eines umschriebenen Konjugierten-Parallelogramms mit der Ellipse sind die Ecken eines einbeschriebenen, zum umschriebenen ähnlichen Konjugierten-Parallelogramms.

Und: Die Mitten der Seiten eines umschriebenen Konjugierten-Parallelogramms sind die Ecken eines einbeschriebenen Konjugierten-Parallelogramms.

Bestimmungsstücke der Ellipse.

289. Allgemein werden alle Eigenschaften der Lage durch Parallelprojektion vom Kreis auf die Ellipse übertragen. Es gelten daher für die Ellipse insbesondere auch die Sätze des Pascal und des Brianchon mit ihren Sonderfällen. Aus ihnen folgt, vgl. 295),

Satz: Die Ellipse ist durch fünf voneinander unabhängige Bedingungen eindeutig bestimmt.

Fläche der Ellipse. Quadratur.

290. Maßbeziehungen am Kreis bleiben in der Parallelperspektive nur dann erhalten, wenn es sich um die Uebertragung von Verhältnissen handelt.

Jede Ellipse mit den Halbachsen $a > b$ ist die senkrechte Parallelprojektion eines Kreises vom Halbmesser a, dessen Ebene gegen diejenige der Ellipse um einen durch $\frac{b}{a} = \cos\alpha$ bestimmten Winkel $\sphericalangle\,\alpha$ geneigt ist. Da die Kreisfläche πa^2 zur Ellipsenfläche E im selben Verhältnis steht, wie jedes dem Kreis umschriebene Quadrat zu seiner Projektion, d. h. dem Konjugierten-Parallelogramm, das im besonderen in dasjenige Rechteck übergehen kann, welches die Achsen der Ellipse zu Seiten hat (welches ist jenes unveränderliche Verhältnis?), so folgt

$$\pi a^2 : E = (2a)^2 : 2a \,.\, 2b = a : b$$

somit

$$E = \pi a^2 \,.\, \frac{b}{a} = \pi a b$$

Ebenso hätte man sagen können, Ellipse und Konjugierten-Parallelogramm stehen im selben Verhältnis wie Kreis und Quadrat, daher, wenn c und d zwei unter $\sphericalangle\,\beta$ zusammenstoßende konjugierte Durchmesser sind, allgemein

$$E : \sin\beta \,.\, cd = \pi a^2 : (2a)^2 = \pi : 4$$

woraus

$$E = \frac{\pi}{4} \sin\beta \,.\, cd$$

insbesondere, wenn das Konjugierten-Parallelogramm zum Rechteck wird, d. h. die konjugierten Durchmesser die zu einander senkrechten Ellipsenachsen 2a und 2b sind,

$$E = \frac{\pi}{4} \sin 90^0 \,.\, 2a \,.\, 2b = \pi a b$$

Wird $a = b$, so erhält man die Kreisfläche πa^2.

Beispiele.

291. 1. Beispiel: Eine Ellipse liege gezeichnet vor. Ihre Achsen zu bestimmen.

Lösung: Die Verbindungsgerade der Mitten zweier beliebiger aber paralleler Sehnen ist ein Durchmesser, die Mitte desselben daher Ellipsenmittelpunkt.

Ein um letzteren als Mittelpunkt beschriebener Kreis schneidet die Ellipse in den vier Eckpunkten eines Rechtecks, dessen Seiten den Achsen parallel sind, dessen Diagonalen zu den Achsen symmetrisch liegen.

292. 2. Beispiel: Einem geg. Parallelogramm die Hauptellipse einzuzeichnen.

Lösung: Betrachte das Parallelogramm als Parallelprojektion eines über einer Parallelogrammseite gezeichneten Quadrats, so ist die gesuchte Ellipse die Parallelprojektion des dem Quadrat einbeschriebenen Kreises. Affinitätsachse ist die gemeinschaftliche Seite. Da die Mitten der Seiten Berührungspunkte sind, so genügt es in den meisten Fällen, um die Ellipse sicher zu zeichnen, ihre Schnittpunkte mit den Diagonalen des Parallelogramms nebst den Tangenten in diesen Punkten durch Parallelprojektion aus dem Kreisbild zu bestimmen. Sollte man je mit diesen acht Tangenten und ihren Berührungspunkten nicht ausreichen, so ziehe man an den Kreis weitere Tangenten und bilde dieselben parallelperspektiv ab mit ihren Berührungspunkten.

Fig. 147.

Betrachte nebenstehende Figur körperlich als Schnitt eines schiefen Kreiscylinders mit einer Ebene. Angenommen Bild- und Kreisebene stehen senkrecht zu einander, bestimme den Winkel der parallelen Projektionsstrahlen mit der Bildebene in wahrer Größe?

293. 3. Beispiel: An eine Ellipse eine Tangente zu ziehen parallel einer geg. Geraden der Ebene der Ellipse.

Lösung: Ziehe den zur geg. Geraden parallelen Durchmesser und zeichne in den Endpunkten des konjugierten Durchmessers die Parallelen zur geg. Geraden.

Oder: Betrachte die Ellipse nebst einem ihr umschriebenen Konjugierten-Parallelogramm als Parallelprojektion eines Quadrats mit einbeschriebenem Kreis. Bestimme in der Kreisebene diejenige Gerade, deren Abbild die geg. Gerade ist. Ziehe zu ersterer die parallele Kreistangente, so ist deren parallelperspektives Bild die gesuchte Gerade. Zwei Lösungen.

294. 4. Beispiel: Die Durchdringungskurve zweier beliebiger, mit ihren Grundflächen auf derselben Ebene stehender, elliptischer oder Kreiscylinder zu zeichnen, d. h. sämtliche Punkte zu bestimmen, in denen sich die Mantellinien beider Flächen begegnen.

Lösung: Je zwei sich in einem Punkt der gesuchten Schnittlinie schneidende Erzeugende beider Cylinder liegen in einer zu den Achsen beider Cylinder parallelen Ebene. Schneide daher beide Cylinderflächen durch eine zu diesen Achsen parallele

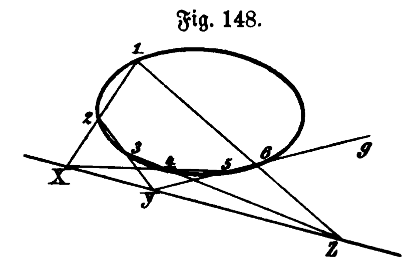
Ebenenschar: Diese erzeugt in der gemeinsamen Grundebene eine Parallelsekantenschar, jede dieser Sekanten bestimmt im günstigsten Fall zwei Paar Mantellinien und somit vier Punkte der gesuchten Kurve.

Diejenigen Mantellinien, welche die Umrisse eines Cylinders bilden, erscheinen in der Figur als Tangenten der Grundfläche, stellen also je zwei zusammengefallene Mantellinien dar. Die Kurve berührt daher die vier Umrißmantellinien beider Cylinder, außerdem aber auch die Berührungsmantellinien derjenigen Ebenen der Parallelschar, die für den einen oder anderen der Cylinder Berührungsebenen werden.

295. 5. Beispiel: Gegeben fünf Punkte einer Ellipse. Weitere Punkte der Ellipse aufzufinden.

Lösung mittels des Satzes von Pascal: Die Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten eines einer Ellipse einbeschriebenen Sehnensechsecks liegen in einer Geraden.

Fig. 148.



Um von einer Seite aus nach der Gegenseite zu gelangen, hat man die zwei nächstfolgenden Seiten auszulassen. Die geg. Punkte seien 1, 2, 3, 4, 5. Ziehe 12 und 54 bis zum Schnitt in X. Ein beliebiger Strahl g durch 5 treffe 23 in Y. Ziehe XY bis zum Schnitt mit 34 in Z, so bestimmt 1Z auf g einen 6. Punkt der Ellipse. Nach diesem Verfahren lassen sich sämtliche weiteren Punkte der Ellipse als Schnittpunkte zweier Strahlenbüschel mit Spitzen 5 und 1 bestimmen.

Sonderfälle, wenn die Seiten des Sehnensechsecks zu Tangenten werden?

Die Kegelfläche.

Erzeugung.

296. Dreht sich eine Gerade, die sogen. Erzeugende, stetig nach irgend einem bestimmten Gesetz um einen ihrer Punkte als festen Drehpunkt, so beschreibt sie eine stetig gekrümmte Regelfläche, die diesen Drehpunkt zur Spitze hat und allgemein als Kegelfläche bezeichnet wird. In ihrer ganzen Ausdehnung besteht sie aus zwei mit der Spitze zusammenhängenden Scheitelkegelflächen, deren jede sich ins Unendliche erstreckt.

Die einfachste dieser Flächen entsteht dadurch, daß die eine von zwei sich schneidenden Geraden, die Erzeugende, sich so um den Schnittpunkt S dreht, daß sie mit der anderen festen Geraden, der sogen. Achse, stets denselben Winkel bildet. Dieser unveränderliche Winkel heißt erzeugender Winkel. Jeder Punkt A der Erzeugenden beschreibt bei dieser Drehung einen Kreis, dessen Halbmesser das

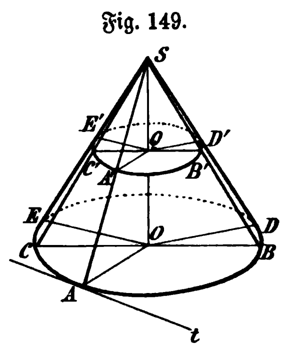
vom Punkt auf die Achse gefällte Lot AO ist; im Fußpunkt O, dem Mittelpunkt des Kreises, steht die Ebene desselben zur Achse senkrecht, daher ist die in A gezeichnete Kreistangente t

$$t \perp OS \quad \text{und da} \quad t \perp OA$$

so folgt

$$t \perp (AOS) \text{ somit } t \perp AS, \text{ d. h.}$$

Fig. 149.



Satz: In allen ihren unendlich vielen Lagen schneidet die Erzeugende sämtliche, von ihren einzelnen Punkten beschriebenen Parallelkreise rechtwinklig. Die erzeugte Fläche heißt daher „senkrechte Kreiskegelfläche".

Auf dieser Fläche können sonach mit Lineal und Zirkel zwei sich rechtwinklig schneidende Linienscharen gezogen werden: das Erzeugenden- oder Mantellinienbüschel und die Parallelkreise, letztere mit der Spitze des Kegels als Mittelpunkt.

Geometrische Oerter.

297. Aus der Art der Erzeugung folgt

Satz: Die Halbmesser aller Parallelkreise, nach denen die Kegelfläche von den zur Achse senkrechten Ebenen geschnitten wird, sind proportional den von der Spitze aus gemessenen Abschnitten der Erzeugenden bezw. der Achse.

Oder: Die senkrechte Kreiskegelfläche ist Ort aller Punkte, deren Entfernungen von einer festen Geraden (Achse) und einem festen Punkt der letzteren (Spitze) ein unveränderliches Verhältnis haben.

298. Satz: Der Ort für die Endpunkte aller Strecken gleicher Länge, die von einem geg. Punkt nach einer geg. Ebene gezogen werden können, ist der um den Fußpunkt des vom Punkt auf die Ebene gefällten Lotes beschriebene Kreis, dessen Halbmesser die durch ein rechtwinkliges Dreieck mit der geg. Strecke als Hypotenuse und dem gefällten Lot als Kathete bestimmte andere Kathete ist.

Der geg. Punkt ist die Spitze, das Lot die Achse und der gefundene Ort ein Parallel- oder Grundkreis eines senkrechten Kreiskegels.

299. Da der Halbmesser des Grundkreises die Projektion der zugehörigen Mantellinie und der von beiden eingeschlossene Winkel das Komplement des erzeugenden Winkels ist, so folgt ferner

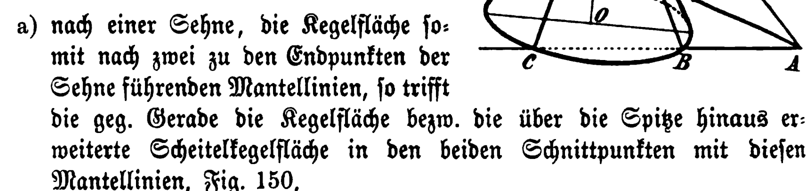
Satz: Die senkrechte Kreiskegelfläche ist Ort aller Geraden von einem Punkt nach einer Ebene, die mit letzterer einen geg. Winkel bilden.

Ebene Schnitte durch die Spitze.

300. Da zwei Mantellinien eine Ebene bestimmen, so wird die senkrechte Kreiskegelfläche von einer durch ihre Spitze gelegten Ebene im allgemeinen nach

zwei Geraden (Erzeugenden) geschnitten. Sind daher die Schnittpunkte einer geg. Geraden mit der Kegelfläche zu bestimmen, so hat man mit anderen Worten diejenigen Mantellinien aufzusuchen, welche die geg. Gerade schneiden, und da sämtliche Mantellinien durch die Spitze gehen, so müssen die gesuchten in der durch die geg. Gerade und die Spitze des Kegels bestimmten Ebene liegen. Schneidet diese Ebene die Ebene eines Parallel- oder Grundkreises

Fig. 150.

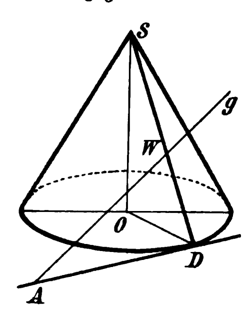


a) nach einer Sehne, die Kegelfläche somit nach zwei zu den Endpunkten der Sehne führenden Mantellinien, so trifft die geg. Gerade die Kegelfläche bezw. die über die Spitze hinaus erweiterte Scheitelkegelfläche in den beiden Schnittpunkten mit diesen Mantellinien, Fig. 150,

b) nach einer Tangente an den Grundkreis, so hat die Ebene mit der Kegelfläche nur die eine zum Berührungspunkt der Grundkreistangente führende Mantellinie gemein und ist daher Berührungsebene, somit

Satz: Jede Berührungsebene an eine senkrechte Kreiskegelfläche geht durch die Spitze des Kegels, berührt den Kegel nach einer Mantellinie und schneidet die Ebene eines Grundkreises nach einer Tangente in dem dem Grundkreis angehörigen Punkt der Berührungsmantellinie, Fig. 150a,

Fig. 150a.



und da die Berührungsmantellinie aus zwei zusammengefallenen Mantellinien hervorgegangen zu denken ist, so folgt ferner

Satz: Jede Gerade einer Berührungsebene berührt die Kegelfläche in ihrem Schnittpunkt mit der Berührungsmantellinie,

oder: Soll eine Gerade eine Kegelfläche berühren, so muß sie in einer Berührungsebene liegen.

c) nach einer Geraden außerhalb des Grundkreises, so hat die Ebene mit der Kegelfläche nur die Spitze gemein. Die geg. Gerade trifft die Kegelfläche nicht.

301. Da Berührungsmantellinie sowohl als Grundkreishalbmesser zur Grundkreistangente im Berührungspunkt senkrecht stehen, so folgt

Satz: Die Berührungsebenen an eine senkrechte Kreiskegelfläche bilden mit der Grundkreisebene denselben Winkel wie die Mantellinien,

oder: Sämtliche Ebenen durch einen geg. Punkt, die mit einer geg. Ebene einen geg. Winkel bilden, sind Berührungsebenen an eine senkrechte Kreiskegel-

fläche, die den geg. Punkt zur Spitze, das vom Punkt auf die Ebene gefällte Lot zur Achse und das Komplement des geg. Winkels zum erzeugenden Winkel hat.

Da die Berührungsebenen in ihrer Gesamtheit den Kegel gewissermaßen umhüllen, so sagt man geradezu: Die senkrechte Kreiskegelfläche ist Ort aller Ebenen durch einen Punkt, die gegen eine geg. Ebene eine vorgeschriebene Neigung haben.

Schiefer Kreiskegel.

302. Die schiefe Kreiskegelfläche entsteht dadurch, daß eine Gerade um einen ihrer Punkte als festen Drehpunkt sich drehend längs des Umfangs eines Kreises, des sogen. Leit- oder Grundkreises, hingleitet. Die Verbindungsgerade von Drehpunkt (Spitze) und Kreismittelpunkt steht schief zur Grundkreisebene und heißt Achse.

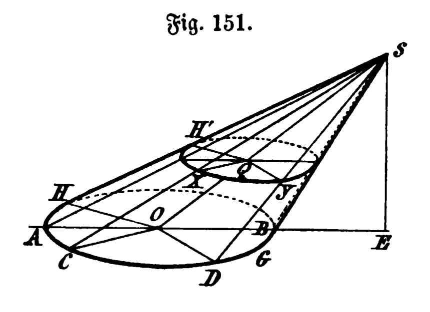
303. Die Ausführungen 300a, b, c gelten auch für die schiefe Kreiskegelfläche.

304. Irgend zwei Achsenschnitte schneiden die Kegelfläche nach den Mantellinien SXC und SYD, die Grundebene und eine zu ihr parallele nach OC ∥ QX und OD ∥ QY, dann ist

$$\frac{QX}{OC} = \left(\frac{SQ}{SO}\right) = \frac{QY}{OD}$$

und da OC = OD, so folgt QX = QY, d. h.

Fig. 151.



Satz: Die Parallelebenen zum Leitkreis schneiden die schiefe Kreiskegelfläche nach Kreisen, deren Halbmesser den Achsenabschnitten proportional sind.

Symmetrieverhältnisse.

305. Die einzige Achsenschnittebene, die zur Grundebene senkrecht steht, ist diejenige, welche die Achse senkrecht projiziert. Da unter allen Winkeln, welche die Achse mit den Grundkreishalbmessern bildet, derjenige der kleinste ist, den sie mit dem in ihre Projektion fallenden Halbmesser einschließt, so ergiebt die Betrachtung der Achsenschnittdreiecke den

Satz: Die senkrechte Achsenschnittebene, der sogen. Hauptachsenschnitt, schneidet die schiefe Kreiskegelfläche nach der kürzesten und längsten Mantellinie und ist zugleich Symmetrieebene der Fläche.

306. Da die zum senkrechten Achsenschnitt symmetrischen Hälften der schiefen Kreiskegelfläche in den Mantellinien SA und SB dieses Achsenschnitts zusammenhängen, so erhebt sich die Frage, ob die Symmetriegerade dieser Mantel-

linien, d. h. die Halbierungs- oder Mittellinie SP ihres Winkels ∢ ASB nicht zugleich Symmetriegerade beider Flächenhälften ist?

Legt man (Fig. 152) durch SP das Ebenenbüschel, so wird die vom Grundkreis begrenzte Kegelfläche nach Dreiecken GSH geschnitten, deren Umkreise als Schnitt des Ebenenbüschels mit der dem Kegel umschriebenen Kugel betrachtet werden können. Denkt man sich die Kugel dadurch erzeugt, daß der Umkreis des

Fig. 152.

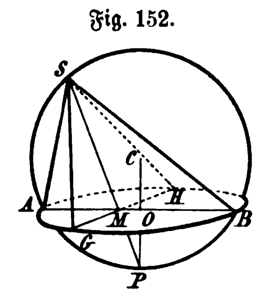
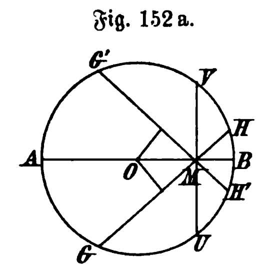


Fig. 152 a.



senkrechten Achsenschnittdreiecks sich um das zur Sehne AB errichtete Mittellot OP als Achse dreht, und berücksichtigt man, daß Umdrehungsachse und Mittellinie die Mitte P des Bogens AB bestimmen, SP also gemeinschaftliche Sehne aller Umkreise und P Pol des Grundkreises ist, so folgt für irgend einen Umkreis GSHP, da Sehne PG = Sehne PH als geradlinige Entfernung des Pols vom zugehörigen Kugelkreis, daß Bogen PG = Bogen PH — man verwechsle nicht den Bogen PG des Umkreises PGSH mit dem durch Ebene (POG) ausgeschnittenen sphärischen Halbmesser PG —, daher die Peripheriewinkel

$$\sphericalangle GSP = \sphericalangle HSP, \quad \text{d. h.}$$

Satz: Die Erzeugenden des schiefen Kreiskegels liegen zur Mittellinie des Winkels der Erzeugenden des senkrechten Achsenschnitts symmetrisch.

307. Bezüglich der Größe der Winkel, welche die zur Mittellinie SP symmetrischen Erzeugenden miteinander einschließen, zeigt sich: Die zum senkrechten Achsenschnitt (ASB) senkrechte Ebene (USV) des Büschels SP, welche die Grundkreisebene nach UMV ⊥ AB schneidet, hat den größten Abstand vom Kugelmittelpunkt, der Umkreis des △ USV ist somit der kleinste. Umgekehrt ist der Umkreis des △ ASB der größte, da seine Ebene durch den Kugelmittelpunkt geht. Unter sämtlichen Schnittdreiecken des Ebenenbüschels SP gehört somit zu gleichen Sehnen PU = PB = . . . im kleinsten Umkreis der größte Winkel ∢ USV, im größten Umkreis der kleinste Winkel ∢ ASB. Fig. 152. In Fig. 152a ist der Grundkreis in wahrer Größe gezeichnet.

308. Da der senkrechte Achsenschnitt (ASB) den Winkel je zweier Ebenen Φ und Ψ des Büschels SP halbiert, die vom Kugelmittelpunkt gleichen Abstand haben, so ist gemäß 70) die zu (ASB) senkrechte Ebene (USV) des Büschels Halbierungsebene des Nebenkeils (Fig. 152a). Die vier zur Mittellinie SP

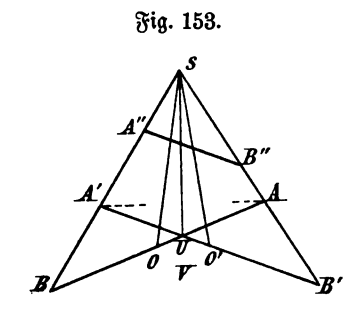
symmetrischen Erzeugenden, nach welchen die Kegelfläche von den Ebenen Φ und Ψ geschnitten wird, sind somit nicht nur zu (ASB), sondern auch zu (USV) symmetrisch, d. h.

Satz: Die schiefe Kreiskegelfläche besitzt im ganzen zwei Symmetrieebenen, den senkrechten Achsenschnitt und den zu diesem senkrechten Mittellinienschnitt.

Wechselschnittkreise.

309. Macht die schiefe Kreiskegelfläche eine Drehung von 180° um die Mittellinie als Achse, so geht, wegen der zur Mittellinie symmetrischen Lage, jede Mantellinie in die ihr symmetrische über, etwa SG in SH (nicht aber Punkt G in Punkt H), d. h. die neue Lage der Kegelfläche deckt sich mit der ursprünglichen. (Ist somit die schiefe Kreiskegelfläche eine Umdrehungsfläche oder nicht?) Bei dieser Drehung kommt der Grundkreis AUB in die bezüglich der zweiten Symmetrieebene (USV) symmetrische Stellung A'UB' und heißt alsdann Wechselschnittkreis. Achse SO geht in die bezüglich der Mittellinie symmetrische Achse SO' über. Beide Kreise durchschneiden sich nach der in M zum senkrechten Achsenschnitt (A S B) senkrechten Sehne UV. Somit

Fig. 153.



Satz: Die schiefe Kreiskegelfläche besitzt zwei Parallelscharen von Kreisschnitten, Grundkreise und Wechselschnittkreise, mit gemeinschaftlichem senkrechten Achsenschnitt. Ort der jeweiligen Mittelpunkte sind die beiden, zur Mittellinie symmetrischen Achsen der Kegelfläche.

Kugelschnitte.

310. Die Betrachtung des senkrechten Achsenschnitts (ASB) ergiebt, daß die Durchmesser AB und A''B'' eines beliebigen Grund- und Wechselschnittkreises ein Kreisviereck bestimmen, da

$$\sphericalangle BA''B'' + \sphericalangle A''A'B' = 180^\circ$$

aber

$$\sphericalangle A''A'B' = \sphericalangle B''AB$$

somit

$$\sphericalangle BA''B'' + \sphericalangle B''AB = 180^\circ$$

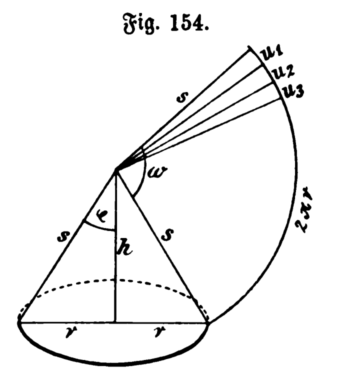
Dreht sich daher der Umkreis dieses Vierecks um einen seiner Durchmesser als Achse, so folgt

Satz: Durch je zwei nicht parallele Kreisschnitte des schiefen Kreiskegels geht eine Kugelfläche.

Abwickelung der Kegelflächen.

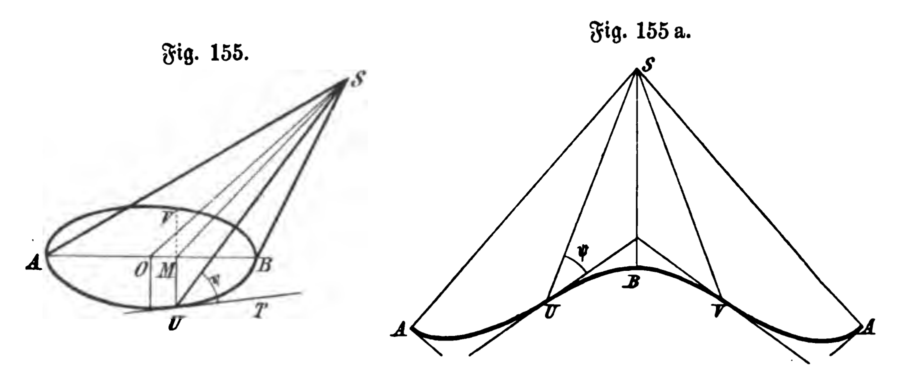
311. Die längs einer Mantellinie aufgeschnittene senkrechte Kreiskegelfläche breitet sich in die Ebene aus als Kreisausschnitt, der die Mantellinie s des Kegels zum Halbmesser und den Umfang $2\pi r$ des Grundkreises, dessen Halbmesser r ist, zum Bogen hat (Fig. 154).

Fig. 154.



312. Die durch Grundkreishalbmesser r, Achsenlänge l und Achsenneigung α geg. schiefe Kreiskegelfläche wickelt sich, nach der längsten Mantellinie aufgeschnitten, ab als die von der Verwandelten des Grundkreises begrenzte Fläche eines Winkels $\sphericalangle\, \omega$. Die längste Mantellinie giebt die Länge der Schenkel, die kürzeste wird zur Winkelhalbierenden (306). Die Verwandelte des Grundkreises ist eine zu dieser Halbierungslinie symmetrische stete Linie, welche, da die Abwickelung eine konforme ist, die Schenkel des Winkels $\sphericalangle\, \omega$ sowohl als die Halbierungslinie rechtwinklig schneidet und in den Schnittpunkten mit $SU = SV = \sqrt{SM^2 + UM^2}$, durch welche $\sphericalangle\, \omega$ in vier gleiche Teile geteilt wird, je einen Wendepunkt besitzt, dessen

Fig. 155. Fig. 155 a.



Tangente mit SU bezw. SV einen Winkel ψ bildet, der sich als dritte Seite eines durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bestimmten Dreikants U — MST ergiebt (Fig. 155). Seite SUM findet man durch Zeichnung des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle$ SMU aus den beiden Katheten, Seite MUT ist der Winkel der Kreistangente in U mit UV und der eingeschlossene Winkel $\sphericalangle$ SMB ergiebt sich aus $\triangle$ ASB.

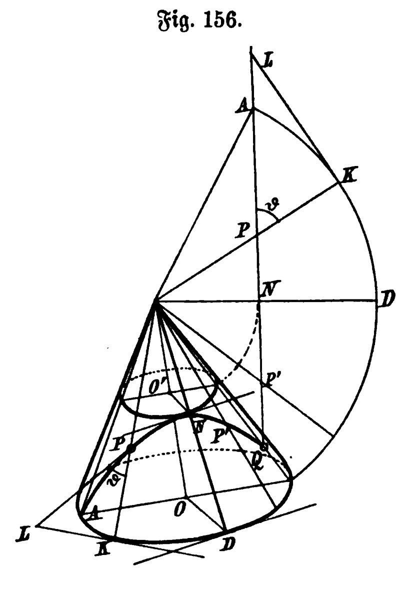
Geodätische Linien.

313. Die kürzeste Linie zwischen zwei beliebigen Punkten P und P′ einer Kegelfläche ist eine als Gerade sich abwickelnde Kurve, eine sogen. geodätische Linie. Sie schneidet die Mantellinien des Kegels unter verschiedenen Winkeln, im

Gegensatz zur Schraubenlinie, der geodätischen Linie des Cylinders.

Die Tangente in einem beliebigen Punkt P derselben ist zugleich Tangente an den Kegel, liegt also in der durch SP gelegten Tangentialebene und bildet mit dieser Mantellinie denselben Winkel $\sphericalangle\, \vartheta$, wie die geodätische Linie oder ihre Verwandelte. Aus dieser Bemerkung ergiebt sich mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle$ PKL die Zeichnung der Tangente (siehe 254).

Fig. 156.



Fußpunkt N des von S auf die Gerade PP' gefällten Lotes wird bei der Aufwickelung der, der Kegelspitze nächst gelegene Punkt der geodätischen Linie. Von Q bis N steigt die Kurve an, von N bis A fällt sie, N heißt daher der Kulminationspunkt. Der durch ihn gehende Parallelkreis berührt die Kurve; die Tangente in N an den Parallelkreis ist daher zugleich Tangente an die geodätische Linie. Fig. 156.

Winkel der Abwickelung.

314. Da die Zentriwinkel und Ausschnitte eines Kreises sich wie die zugehörigen Bögen verhalten, so folgt für den Zentriwinkel $\sphericalangle\, \omega$ der Abwickelung des senkrechten Kreiskegels (Fig. 154)

$$\omega : 360 = 2\pi r : 2\pi s$$

woraus

$$\omega = \frac{r}{s} \cdot 360^\circ$$

wobei r und s in derselben Maßeinheit auszudrücken sind, der Bruch $\frac{r}{s}$ somit einen unbenannten echten Bruch darstellt und ω die der Zahl 360 zugehörige Benennung Grad hat.

Ist insbesondere

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{2}$$

d. h. der Achsenschnitt des Kegels ein gleichseitiges Dreieck, so folgt

$$\omega = 180^\circ$$

d. h. die Abwickelung des gleichseitigen Kegels ist ein Halbkreis.

Ist φ der erzeugende Winkel, so zeigt der Achsenschnitt

$$\sin \varphi = \frac{r}{s}$$

und somit

Satz: Der Winkel $\sphericalangle\, \omega$ der Abwickelung und der erzeugende Winkel $\sphericalangle\, \varphi$ des senkrechten Kreiskegels stehen in der Beziehung

$$\omega = \sin \varphi \cdot 360^\circ$$

Analogie mit dem Satz von Foucault über die Drehung der Schwingungsebene des Pendels zum Nachweis der Eigendrehung (Rotation) der Erde.

Ausmessung der Mantelfläche des senkrechten Kreiskegels.

315. Vervollständigt man die abgewickelte Mantelfläche M des senkrechten Kreiskegels zum vollen Kreis, so folgt, gemäß Einleitung zu 314),

$$M : \pi s^2 = 2\pi r : 2\pi s$$

woraus

$$\mathbf{M = \pi r s} \quad . \quad . \quad . \quad = 2\pi r \cdot \frac{s}{2} = 2\pi \frac{r}{2} \cdot s$$

d. h. der Mantel eines senkrechten Kreiskegels ist gleich demjenigen eines senkrechten Kreiscylinders vom selben Grundkreishalbmesser und der halben Kegelmantellinie als Höhe oder vom halben Grundkreishalbmesser und der ganzen Kegelmantellinie als Höhe.

316. Die Berechnung nach der Exhaustionsmethode ergiebt: Der Kreisausschnitt ist die Summe der unendlich vielen, unendlich schmalen Flächenstreifen f, welche die sich folgenden unendlich benachbarten Halbmesser miteinander einschließen. Fig. 154. Jeder dieser Flächenstreifen kann als gleichschenkliges Dreieck betrachtet werden. Es ist gestattet, in diesem Grenzfall die Grundseite als unendlich kleine Kreissehne mit dem zugehörigen Bogen u und die Höhe mit dem Schenkel s zu verwechseln, daher sind die einzelnen Flächenelemente:

$$f_1 = \frac{u_1 \cdot s}{2},\; f_2 = \frac{u_2 \cdot s}{2},\; f_3 = \frac{u_3 \cdot s}{2} \ldots$$

und somit der Mantel

$$M = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots = \frac{s}{2}(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots) = \frac{s}{2} \cdot 2\pi r$$
$$= \pi r s$$

Mantelfläche des senkrechten Kreiskegelstumpfs.

317. Die Mantelfläche eines durch zwei parallele Grundkreise begrenzten senkrechten Kreiskegelstumpfs ist ein Kreisringausschnitt, der die Mantellinie s des Kegelstumpfs zur Breite und die Umfänge $2\pi r$ und $2\pi r'$ der Grundkreise ($r > r'$) zu konzentrischen Bögen hat.

Erweitert man den Kegelstumpf zum vollen Kegel, so berechnet sich seine Mantelfläche M als Unterschied der Mantelflächen des ganzen und des Ergänzungskegels. Sind x und y die Mantellinien dieser beiden Kegel, so ist (siehe Achsenschnitt des Kegelstumpfs in Fig. 157)

$$M = \pi r x - \pi r' y$$

Zur Bestimmung von x und y aus den bekannten Größen r, r', s hat man, aus dem Achsenschnitt ersichtlich, die beiden Gleichungen

$$x - y = s \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} = \frac{r}{r'}$$

woraus

$$x = \frac{r}{r - r'} \cdot s \qquad \text{und} \qquad y = \frac{r'}{r - r'} \cdot s$$

somit

$$M = \pi s \cdot \frac{r^2}{r - r'} - \pi s \cdot \frac{r'^2}{r - r'}$$

$$= \pi s \cdot \frac{r^2 - r'^2}{r - r'}$$

oder

$$\mathbf{M = \pi s (r + r')} \qquad = 2\pi \frac{r + r'}{2} \cdot s$$

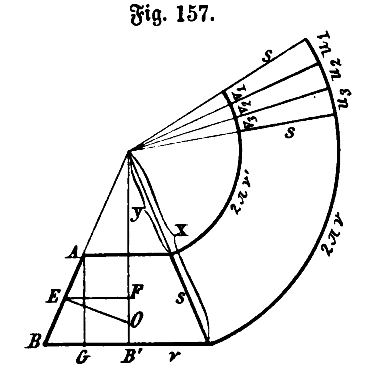
d. h. die Mantelfläche des senkrechten Kreiskegelstumpfs ist gleich derjenigen eines senkrechten Kreiscylinders, der die Mantellinie des Kegelstumpfs zur Höhe und die Mittellinie des gleichschenkligen Achsenschnitttrapezes zum Grundkreisdurchmesser hat.

318. Hieran schließt sich naturgemäß die Frage: Wie groß wird der Grundkreishalbmesser des senkrechten Kreiscylinders, wenn derselbe ebenso hoch ist, wie der senkrechte Kreiskegelstumpf, mit dem er gleiche Mantelfläche hat?

Fällt man $AG \perp BB'$ und errichtet auf der Mantellinie AB das Mittellot $EO = p$ bis zum Schnitt mit der Achse, so ist $\triangle AGB \sim \triangle EFO$ und somit

$$\frac{AG}{AB} = \frac{EF}{EO} \quad \text{oder} \quad \frac{h}{s} = \frac{\frac{r + r'}{2}}{p}$$

Fig. 157.



woraus

$$\frac{r + r'}{2} \cdot s = p \cdot h$$

und somit auch

$$2\pi \frac{r + r'}{2} \cdot s = 2\pi p h$$

daher gemäß 315)

$$\mathbf{M = 2\pi p \cdot h}$$

d. h. die Strecke p ist der gesuchte Grundkreishalbmesser.

319. Berechnung der Mantelfläche des senkrechten Kreiskegelstumpfs nach der Exhaustionsmethode: Die sich folgenden unendlich benachbarten Halbmesser des Kreisringausschnitts zerlegen diesen in unendlich viele, unendlich schmale Flächenstreifen f von der Gestalt gleichschenkliger Trapeze, welche die Mantellinie oder Breite s des Kreisringausschnitts zur Höhe und die unendlich kleinen, mit den jeweiligen Kreisbögen u und v zu verwechselnden Kreissehnen zu parallelen Grundseiten haben. Die einzelnen Flächenstreifen sind daher (Fig. 157)

$$f_1 = \frac{u_1 + v_1}{2} \cdot s, \quad f_2 = \frac{u_2 + v_2}{2} \cdot s, \quad f_3 = \frac{u_3 + v_3}{2} \cdot s \ldots$$

und somit ihre Gesamtsumme, die gesuchte Mantelfläche

$$M = \frac{s}{2}(u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 + \ldots)$$
$$= \frac{s}{2}(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots)$$
$$= \frac{s}{2}(2\pi r + 2\pi r')$$
$$= \pi s(r + r')$$

Beispiele.

320. 1. Aufgabe: Von einem geg. Punkt P eine Berührungsebene an einen senkrechten Kreiskegel zu legen.

Lösung: Da jede Berührungsebene durch die Spitze S des Kegels geht, so ist SP eine Gerade der gesuchten Ebene. Der Schnittpunkt T dieser Geraden mit der Grundkreisebene ist ein Punkt der Tangente, nach welcher sich Berührungs- und Grundkreisebene schneiden. Die durch ST und jede der beiden, von T an den Grundkreis möglichen Tangenten t und t′ gelegten Ebenen (SPt) und (SPt′) sind die gesuchten Berührungsebenen. Fig. 158.

Dieselbe Lösung gilt, wenn der geg. Kreiskegel schief ist.

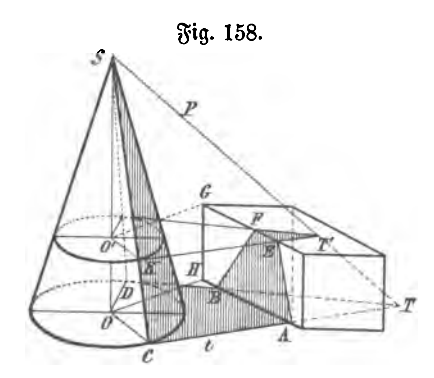
321. Liegt P im Unendlichen, d. h. ist P durch die Richtung der Geraden g gegeben, so ändert sich die Lösung nicht. Die Aufgabe lautet dann mit anderen Worten:

Parallel einer geg. Geraden g eine Berührungsebene an einen Kegel zu legen.

Lösung: Verbinde S mit P, d. h. ziehe durch die Spitze des Kegels die Parallele ST zu g und verfahre weiter wie 320).

322. Ist P eine Lichtquelle (in Fig. 158 auf der Verlängerung von TS anzunehmen), so bestimmen die nach den Berührungspunkten C und D der Tangenten t und t′ gezogenen Berührungsmantellinien des Kegels die Licht- und Schattengrenze auf dem Kegel. Die Tangenten TC und TD begrenzen mit dem kleineren Grundkreisbogen CD den Schlagschatten des Kegels auf die Grundkreisebene.

Fig. 158.



Wirft z. B. der Kegel seinen Schatten auf einen, mit einer seiner Flächen auf der Grundkreisebene ruhenden Quader, so führe man das Verfahren 320) in der Grundfläche sowohl als in der zu ihr parallelen, bis zum Schnitt mit dem Kegel erweiterten Deckfläche des Quaders durch. Dadurch sind dann auch die Schnittgeraden der durch die Lichtquelle bestimmten Berührungsebenen des Kegels mit den

dem Kegel zugekehrten Seitenflächen des Quaders gefunden. Fig. 158: $GH = OO'$, $CT \parallel KT'$, $T'F \parallel TD$. Ist die Sonne die Lichtquelle, so liegt P im Unendlichen.

323. 2. Aufgabe: Einen senkrechten Kreiskegel zu errichten, so daß eine geg. Ebene Σ Grundkreisebene wird und die Kegelfläche durch eine geg. Gerade g und einen geg. Punkt P hindurchgeht.

Lösung: Die durch P und g bestimmte Ebene schneidet den gesuchten, durch Σ begrenzten Kegel nach einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Spitze die Kegelspitze ist. Dieses Dreieck ist eindeutig bestimmt: der Schnittpunkt B der Geraden g mit Σ ist eine Grundecke, ein Schenkel fällt in die Gerade g, der andere geht durch P und die Schnittgerade BD der Ebenen (Pg) und Σ giebt die Grundseite. Der Fußpunkt O des Lots von S auf Σ ist der Mittelpunkt des Grundkreises.

Andere Lösung: Die Parallele durch P in (Pg) mit der Schnittgeraden BD trifft g in einem Punkt E. Da die Kegelspitze von beiden Punkten E und P gleiche Entfernungen hat, so liegt sie auf der Mittellotebene zu EP.

324. 3. Aufgabe: Den Schnitt zweier senkrechter Kreiskegel zu zeichnen, welche die Spitze gemein haben.

Lösung: Die Ebene der beiden Achsen schneidet die Kegelflächen nach den erzeugenden Winkeln φ und ψ, die, links und rechts dem Winkel μ der Achsen anliegend, an die Zeichnung des Dreikants aus den drei Seiten erinnern. Die Kegelflächen durchschneiden sich nach den beiden zur gemeinschaftlichen Achsenschnittebene symmetrischen Mantellinien, zu denen sich die freien Schenkel von φ und ψ bei ihrer Drehung um die zugehörigen Achsen vereinigen.

In dem durch die drei Seiten φ, μ, ψ bestimmten Dreikant (190) sind daher auf der Seite μ in F nach entgegengesetzten Seiten die Lote FA und FA_1 je gleich FX bezw. FY zu errichten, dann sind AS und A_1S die gesuchten Durchschnitte.

Die Kegelflächen schneiden sich nach zwei Mantellinien, berühren sich, schneiden sich nicht, je nachdem $\mu \lesseqgtr \varphi + \psi$.

325. 4. Aufgabe: Den Durchschnitt zweier beliebiger, auf derselben Ebene ruhender Kreiskegelflächen zu bestimmen.

Lösung: Je zwei sich schneidende Mantellinien beider Kegel liegen mit den Spitzen S und S' in einer Ebene. Um daher sämtliche Punkte der gesuchten Schnittlinie zu erhalten, schneidet man beide Kegelflächen durch ein Ebenenbüschel mit SS' als Träger. Jede Ebene dieses Büschels schneidet jede der beiden Kegelflächen im allgemeinen nach zwei Mantellinien und liefert somit vier Punkte des Durchschnitts. Die Spuren der Ebenen des Büschels mit der gemeinsamen Grundkreisebene gehen durch den Schnittpunkt letzterer mit SS'.

Es ergiebt sich punktweise eine stete Linie, welche die Umgrenzungsmantellinien der Kegelflächen und die Berührungsmantellinien der von S S′ aus an die Flächen möglichen Berührungsebenen berührt.

Besondere Fälle je nach der gegenseitigen Lage der Grundkreise (siehe 294).

326. 5. Aufgabe: Durch einen geg. Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche zwei auf gemeinsamer Grundfläche ruhende beliebige Kreiskegelflächen berührt.

Die Schnittgeraden der von P an die Kegelflächen gelegten Berührungsebenen sind die gesuchten Lösungen. Möglichkeiten?

327. Allgemeine Bemerkung: Der Cylinder kann betrachtet werden als Kegel mit unendlich ferner Spitze. Sämtliche Entwickelungen am Cylinder sind daher Sonderfälle derjenigen des Kegels.

Schnitt der senkrechten Kreiskegelfläche durch beliebige Ebenen.

328. Hier bestehen folgende Möglichkeiten:

1. Die schneidende Ebene trifft sämtliche Mantellinien, die Schnittlinie ist daher eine stete geschlossene Linie. Die Parallelebene durch die Spitze schneidet die Kegelfläche nicht.
2. Sie ist parallel einer Mantellinie, also parallel einer Berührungsebene. Die Schnittlinie ist eine stete nicht geschlossene Linie mit einem unendlich fernen Punkt, dem Schnittpunkt ihrer Ebene mit der ihr parallelen Mantellinie.
3. Sie ist parallel zwei Mantellinien, also parallel einer die Kegelfläche schneidenden Ebene durch die Spitze. Sie schneidet daher in diesem Fall auch die Scheitelkegelfläche und erzeugt eine ebenfalls nicht geschlossene stete Schnittlinie mit zwei unendlich fernen Punkten.

Erster Fall: Die Ellipsenschnitte.

329. Dem zur Schnittebene senkrechten Achsenschnitt $\triangle ASB$ seien der ein- und anbeschriebene, AB in F bezw. F′ berührende Kreis eingezeichnet. Durch Umdrehung um einen ihrer Durchmesser entstehen zwei Kugeln, welche die Kegelfläche nach parallelen Grundkreisen mit den Durchmessern GH und KL und die Schnittebene in denselben Punkten F und F′ wie die erzeugenden Kreise berühren (sogen. Dandelinsche Berührungskugeln). Irgend eine Mantellinie SQ werde von der Schnittebene in X, einem Punkt der zu untersuchenden Schnittlinie, getroffen. Dann ist wie beim schiefen Schnitt des senkrechten Kreiscylinders (262):

$$XF = XP \text{ und } XF' = XQ$$

somit

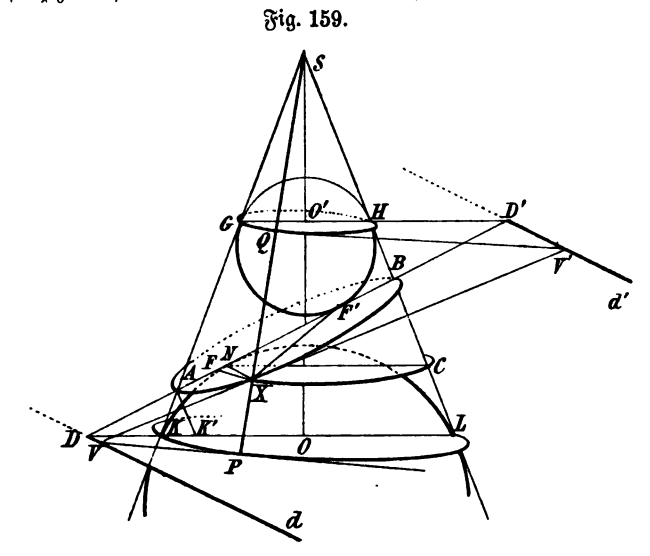
$$XF + XF' = PQ = GK = AB = \text{konstans}$$

somit

Satz: Der Schnitt der senkrechten Kreiskegelfläche mit einer alle Mantellinien schneidenden Ebene ist eine Ellipse, welche von dem zu ihrer Ebene senkrechten Achsenschnitt des Kegels nach der großen Achse geschnitten wird,

oder, da die Mantellinien des Kegels die Parallelkreise desselben von der Spitze aus projizieren,

Fig. 159.



Satz: Die Zentralprojektion eines Kreises auf eine sämtliche Projektionsstrahlen schneidende Ebene ist eine Ellipse,

giltig allerdings vorerst bloß unter der Voraussetzung einer besonderen Lage des Projektionsmittelpunkts!

Brennpunkte und Tangente.

330. Räumliche Ableitung des Tangentensatzes (vergl. 265): Die in SQ an den Kegel gelegte Berührungsebene schneidet die Ebenen der Berührungskreise und Ellipse nach den jeweiligen Tangenten $VP \parallel V'Q$ und VV'. Dann folgt aus der Gleichheit entsprechender Seiten

$$\triangle VPX \cong \triangle VFX \text{ somit } \sphericalangle VXP = \sphericalangle VXF$$

ebenso

$$\triangle V'QX \cong \triangle V'F'X \text{ somit } \sphericalangle V'XQ = \sphericalangle V'XF'$$

aber als Scheitelwinkel

$$\sphericalangle VXP = \sphericalangle V'XQ$$

daher

$$\sphericalangle VXF = \sphericalangle V'XF'$$

d. h.

Satz: Die Ellipsentangente halbiert den Nebenwinkel der Brennstrahlen zum Berührungspunkt.

Leitlinie (Direktrix).

331. Da die Ellipsenebene von den Ebenen der Berührungskreise nach den festliegenden Geraden VD und V'D' geschnitten wird, die zum Achsenschnitt und daher zur großen Achse senkrecht stehen, und

$$\sphericalangle VFX = \sphericalangle VPX = 90^\circ$$
$$\sphericalangle V'F'X = \sphericalangle V'QX = 90^\circ$$

so folgt

Satz: Die Schnittpunkte jeder Ellipsentangente mit den beiden Loten, die in den Brennpunkten auf den zum Berührungspunkt gezogenen Brennstrahlen errichtet werden, liegen auf zwei die Ellipse nicht schneidenden, zur kleinen Achse parallelen und symmetrischen Geraden, den sogen. Leitlinien VD und V'D'.

332. Hieraus folgt, da zwei sich zu einer Sehne ergänzende Brennstrahlen das im Brennpunkt errichtete Lot gemein haben,

Satz: Dreht sich eine Sehne um den Brennpunkt, so durchläuft der Schnittpunkt der in ihren Endpunkten gezeichneten Tangenten die diesem Brennpunkt zugehörige Leitlinie.

333. Zieht man im Achsenschnitt AK' || SL, so ist, da D der Schnittpunkt von AB und KL,

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AK'}{BL} \quad \text{somit da} \quad AK' = AK = AF \quad \text{und} \quad BL = BF \quad (218)$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{FA}{FB} \quad \text{und ebenso} \quad \frac{D'A}{D'B} = \frac{F'A}{F'B}$$

d. h.

Satz: Brennpunkt und zugehörige Leitlinie teilen die große Achse harmonisch.

Hieraus ergiebt sich nebenbei auch AD = BD' zum Nachweis der symmetrischen Lage der Leitlinien.

334. Legt man durch X die zu den Berührungskreisen parallele Grundkreisebene, welche die Ellipsenebene nach XN ⊥ AB und den Achsenschnitt nach NC || KL schneidet, so ist

$$\frac{DN}{DB} = \frac{LC}{LB} \quad \text{oder da} \quad CL = PX = XF \quad \text{und} \quad BL = BF$$

$$\frac{DN}{DB} = \frac{XF}{BF} \quad \text{oder} \quad \frac{XF}{ND} = \frac{BF}{BD}$$

Dieses konstante Verhältnis läßt sich mittels der harmonischen Beziehung 333) wie folgt, umformen

$$\frac{BF}{BD} = \frac{AF}{AD} = \frac{BF - AF}{BD - AD} = \frac{FF'}{AB} = \frac{f}{a}$$

somit

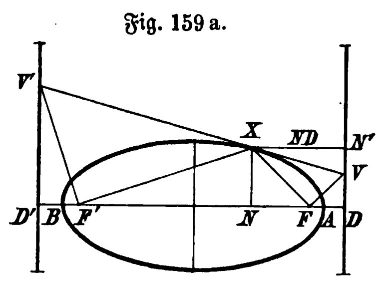
$$\frac{XF}{ND} = \frac{XF'}{ND'} = \frac{f}{a} = \varepsilon . (< 1)$$

d. h. da ND bezw. ND' die Abstände des Ellipsenpunkts X von den Leitlinien sind,

Satz: Das Verhältnis der Abstände jedes beliebigen Ellipsenpunkts von einem der Brennpunkte und der diesem zugehörigen Leitlinie ist unveränderlich. Es ist das Verhältnis der halben Brennweite zur halben großen Achse und heißt Exzentrizität (271).

Der Wert dieses Verhältnisses ist für die Ellipse stets < 1.

Fig. 159 a.

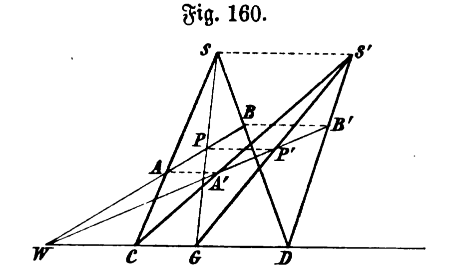


335. Die Beziehungen 329—334 lassen sich in derselben Weise am senkrechten Kreiscylinder ableiten. Sie sind in Fig. 159 a in wahrer Größe dargestellt.

Zentralprojektion des Kreises und der Ellipse.

336. Verschiebt man jeden Punkt eines senkrechten Kreiskegels in einer und derselben zur Grundkreisebene parallelen Richtung um eine dem Abstand des Punkts von der Grundebene proportionale Strecke, so geht jede Mantellinie SG in die nach der parallel verschobenen Spitze S' gezogene Mantellinie S'G über: Aus der senkrechten Kreiskegelfläche entsteht eine schiefe, die mit ersterer Grundkreis und Höhe gemein hat. Die durch die Achse des senkrechten Kegels und die Verschiebungsrichtung gelegte Ebene ist der senkrechte Hauptachsenschnitt des schiefen Kegels.

Fig. 160.



Jede Ebene geht nach diesem Verfahren in eine um ihre Schnittgerade mit der Grundebene gedrehte Stellung über. Die Punkte der Schnittellipse AB bilden daher nach der Uebertragung einen ebenen Schnitt des schiefen Kreiskegels, der als Parallelprojektion einer Ellipse wieder eine Ellipse sein muß (278), somit

Satz: Der Schnitt einer schiefen Kreiskegelfläche mit irgend einer alle Mantellinien treffenden Ebene ist eine Ellipse.

Wird diese Ellipse als Grundfläche des Kegels betrachtet, so folgt allgemein

Satz: Der Schnitt eines beliebigen elliptischen Kegels mit irgend einer, alle Mantellinien treffenden Ebene ist wieder eine Ellipse (im Sonderfall ein Kreis). Mit anderen Worten

Satz: Die Zentralprojektion eines Kreises oder einer Ellipse ist eine Ellipse, sobald sämtliche projizierende Strahlen die Bildebene treffen (im Sonderfall ein Kreis).

Im allgemeinen erblickt man daher jeden Kreis perspektivisch verkürzt als Ellipse. Wann als Gerade oder wieder als Kreis?

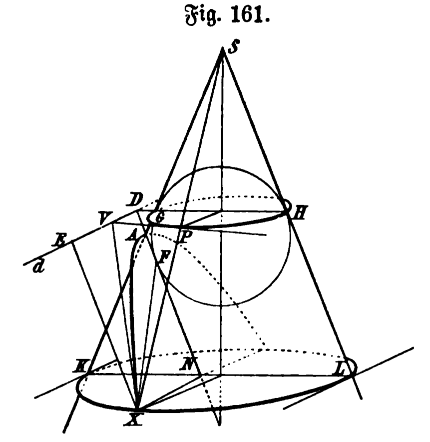
Der Schatten einer Kugel auf eine sie berührende Ebene ist eine Ellipse, vorausgesetzt daß die Entfernung der Lichtquelle von der Ebene größer ist als der Durchmesser. Der Berührungspunkt der Kugel ist der eine der beiden Brennpunkte der Ellipse.

Die Bemerkung 289) gilt auch für die Zentralprojektion. Man heißt daher allgemein Eigenschaften, die durch Projektion unverändert übertragen werden, projektive Eigenschaften (Pol und Polare, Sätze von Pascal und Brianchon u. s. f.).

Zweiter Fall: Die Parabelschnitte.

337. Dem Achsenschnitt durch die Berührungsmantellinie SL der zur Schnittebene Σ parallelen Berührungsebene eines senkrechten Kreiskegels kann, da er die Schnittebene nach AN || SL schneidet, nur ein einziger Kreis einbeschrieben werden. Dieser erzeugt eine Dandelinsche Kugel, welche die Schnittebene in F und den Kegel nach dem Grundkreis vom Durchmesser GH berührt. Letzterer und die Schnittebene schneiden sich nach der zum Achsenschnitt und daher zu AN senkrechten Geraden VD. Die Grundkreisebene durch den Treffpunkt X einer Mantellinie und der Schnittebene schneidet diese nach XN || VD und den Achsenschnitt nach NL || GH, dann ist, da auch ND || HL,

Fig. 161.



$$XP = HL = ND = XE, \quad \text{wobei} \quad XE \perp VD,$$

ferner

$$XP = XF$$

somit

$$XF = XE \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \frac{XF}{XE} = 1$$

d. h. jeder Punkt der Schnittlinie hat von einer festen Geraden VD und einem festen Punkt F der Schnittebene gleiche Entfernungen.

Die Schnittlinie ist eine stete, nicht geschlossene Linie mit einem unendlich fernen Punkt, dem Schnittpunkt ihrer Ebene mit der zu ihr parallelen Berührungsmantellinie SL, und heißt Parabel. Ihre Exzentrizität ist 1.

Satz: Der Schnitt eines senkrechten Kreiskegels mit einer zu einer Berührungsebene parallelen Ebene ist eine Parabel,

oder: Die Zentralprojektion eines Kreises auf eine, zu nur einem Projektionsstrahl parallele Ebene ist eine Parabel,

vorausgesetzt ist hiebei allerdings zunächst noch die besondere Lage des Projektionsmittelpunkts auf dem zur Kreisebene im Mittelpunkt errichteten Lot. Als Ort aufgefaßt folgt

Satz: Die Parabel ist Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die eine geg. Gerade berühren und durch einen geg. Punkt gehen (vergl. 264).

Man führe demgemäß eine Zeichnung der Parabel durch.

338. Sind x und y die Abstände eines Parabelpunkts von der Achse und der Scheiteltangente und wird die Brennweite AF mit $\frac{p}{2}$ bezeichnet (Parameter der Parabel), so geht

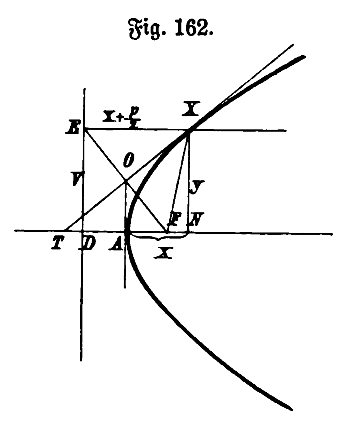


Fig. 162.

$$XF = XE \text{ quadriert über in } XF^2 = XE^2$$

oder

$$XN^2 + FN^2 = XE^2$$

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

woraus

$$y^2 = 2px$$

oder

$$\frac{y^2}{x} = 2p = \text{konstans}$$

Satz: Für jeden Punkt der Parabel ist die dritte Proportionale seiner Abstände von der Achse und der Scheiteltangente konstant.

Hiernach ergiebt sich eine einfache Zeichnung der Parabel auf Grund des Satzes über das Quadrat der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks: Beschreibe um die Punkte der Achse Kreise durch A, trage vom anderen Schnittpunkt aus $2DF = 2p$ auf der Achse nach F zu ab, errichte die Senkrechte bis zum Schnitt mit dem jeweiligen Kreis und verbinde die so erhaltenen Parabelpunkte durch eine stete Linie aus freier Hand (siehe 445, 2).

Da nur solche Punkte, deren Abstände von Achse und Scheiteltangente der Bedingung $\frac{y^2}{x} = 2p$ genügen, Punkte der Parabel sind, alle anderen Punkte dagegen, deren Abstände dieser Bedingung nicht genügen, auch nicht auf der Parabel liegen, so heißt

$y^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel.

Bedeutung der Parabel in der Physik. Die Wurfgleichungen z. B. führen auf Satz 338).

339. Da jede Sehne des Kreises (GH) von S aus als Parabelsehne projiziert wird, wobei insbesondere das Ebenenbüschel durch SH die Kreissehnen durch H als Parallelstrahlenbüschel zu AN durch den unendlich fernen Punkt der Parabel abbildet, so folgt allgemein

Satz: Die Parabel wird von einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten.

340. Die Parabel kann als Ellipse betrachtet werden, deren einer Brennpunkt ins Unendliche gerückt ist. Ihre Eigenschaften sind daher Sonderfälle derjenigen der Ellipse, können aber auch unmittelbar aus Fig. 161 hergeleitet werden.

Brennpunkt und Tangente.

341. Fig. 161: Aus der senkrechten Stellung der Schnittebene zum Achsenschnitt folgt, daß AN die einzige Symmetriegerade und daher Achse der Parabel ist. Aus $DG \parallel KN$ ergiebt sich ferner

$$\frac{DA}{DN} = \frac{AG}{KG} \text{ und da } DN = HL = KG,$$

so folgt

$$DA = AG = AF,$$

somit

Satz: Der Scheitel A halbiert den Abstand des Brennpunkts F von der Leitlinie.

Der Satz folgt auch aus der Betrachtung 337), ferner als Sonderfall der harmonischen Lage der Punkte $D\,A\,F\,\infty$ 333).

342. Fig. 161: Die in SX an den Kegel gelegte Berührungsebene schneidet die Ebenen der Parabel und des Berührungskreises nach den bezüglichen Tangenten XV und PV, die sich im Punkt V der Leitlinie VD begegnen. Dann ist

$$\triangle XPV \cong \triangle XFV \quad \text{somit} \quad \sphericalangle XFV = 90^\circ$$

d. h. Satz 331).

343. Fig. 161: Aus $\triangle XEV \cong (\triangle XPV) \cong \triangle XFV$ folgt

$$\sphericalangle EXV = \sphericalangle VXF$$

somit, da $XE \parallel FD$,

Satz: Die Tangente halbiert den, dem Scheitel zu geöffneten Winkel zwischen der durch den Berührungspunkt gezogenen Parallelen zur Achse und dem zugehörigen Brennstrahl.

Vergl. hiemit Satz 330). Die Brennstrahlen nach dem unendlich fernen Brennpunkt gehen parallel der Achse.

344. Da die Normale den Innenwinkel zwischen Parallel- und Brennstrahl halbiert, so folgt: Alle parallel zur Achse einfallenden Lichtstrahlen werden vom parabolisch gekrümmten Hohlspiegel im Brennpunkt vereinigt. Umgekehrt werden die von einer im Brennpunkt dieses Spiegels angebrachten Lichtquelle ausgesandten Strahlen nicht zerstreut, sondern parallel zur Achse fortgeworfen.

Dadurch erzielt man eine kräftigere Beleuchtung entfernter Gegenstände. (Vorteil gegenüber dem Kugelhohlspiegel.)

Der parabolische Hohlspiegel bildet die Innenfläche eines sogen. Rotations- oder Umdrehungsparaboloids, das durch Drehung einer Parabel um ihre Achse beschrieben wird.

345. Fig. 162: Die Betrachtung des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle EXF$ zeigt, daß die Parabeltangente XT Mittellot zu EX ist, hieraus folgt, daß auch $\triangle EFT$ gleichschenklig und somit

$$\sphericalangle ETO = \sphericalangle OTF = \sphericalangle OXE = \sphericalangle OXF$$

daher $XF \parallel ET$ und somit $EXFT$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, d. h. ein Rhombus, demnach $XO = OT$; da ferner $OA \parallel ED$, wegen $OF = OE$ und $AF = AD$, und $OA \parallel XN$, so folgt

$$AN = AT$$

daher

Satz: Projiziert man den von Berührungspunkt und Achsenschnittpunkt begrenzten Tangentenabschnitt senkrecht auf die Achse, so wird die Projektion vom Scheitel halbiert.

Hiernach läßt sich in sehr einfacher Weise in jedem Punkt der Parabel die Tangente zeichnen: $XN \perp NA$ und $AN = AT$.

Durchmesser.

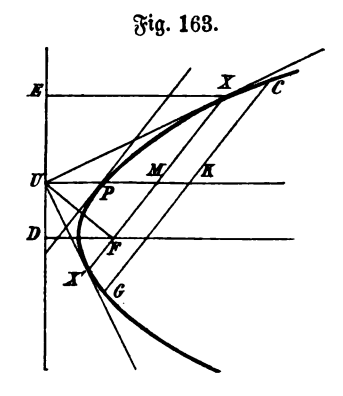
346. Alle zur Achse der Parabel parallelen Geraden können, da sie sowohl nach dem unendlich fernen zweiten Brennpunkt als nach dem unendlich fernen Mittelpunkt führen, sowohl als Brennstrahlen wie als Durchmesser betrachtet werden. Die Durchmessersätze (286) lauten daher auf die Parabel übertragen:

Satz: Die Mitten jeder Parallelschar Sehnen von beliebiger Richtung liegen auf einer Parallelen zur Achse, dem der Schar zugeordneten (konjugierten) Durchmesser.

Insbesondere steht die Achse auf der zugeordneten Sehnenschar senkrecht.

Sämtliche Durchmesser sind der Achse parallel und schneiden die Parabel nur in je einem (endlichen) Punkt. Konjugierte Durchmesser besitzt die Parabel nicht.

Fig. 163.



Satz: Die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers ist parallel der zugeordneten Sehnenschar.

Satz: Die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne schneiden sich auf dem der Sehne zugeordneten Durchmesser.

Ueber die räumliche Ableitung der Durchmessersätze siehe 350).

347. Fig. 163: Die Tangenten in den Endpunkten einer beliebigen Sehne XX' durch den Brennpunkt F schneiden sich in einem Punkte U der Leitlinie (332). Durch denselben Punkt geht gemäß 346) der dieser Brennpunktsehne zugeordnete Durchmesser UM. Daher, wenn EX || UM, gemäß 343)

$$\sphericalangle UXM = \sphericalangle UXE = \sphericalangle XUM$$

daher

$$UM = MX = MX'$$

somit liegt U auf dem Umfang des Halbkreises, der XX' zum Durchmesser hat, d. h. $\triangle XUX'$ ist rechtwinklig und somit

Satz: Die Tangenten in den Endpunkten einer Brennpunktsehne schneiden sich unter rechtem Winkel auf der Leitlinie.

Zugleich folgt aus dieser Betrachtung Satz 331) bezw. 342), denn

$$FX \,.\, FX' = (MX - MF)(MX + MF) = MX^2 - MF^2 = MU^2 - MF^2$$
$$= FU^2 \qquad \text{daher} \qquad FU \perp XX'.$$

Parallelprojektion der Parabel.

348. Da jede beliebige Parallelprojektion einer Ellipse wieder eine Ellipse ist (278), so folgt als Sonderfall

Satz: Jede beliebige Parallelprojektion einer Parabel ist wieder eine Parabel.

Oder: Jeder beliebige parabolische Cylinder, entstanden dadurch, daß eine Gerade von beliebiger Richtung sich selbst parallel längs einer Parabel hingleitet, wird von jeder beliebigen Ebene nach einer Parabel geschnitten.

Zentralprojektion der Parabel.

349. Verfährt man wieder wie in 336), so folgt

Satz: Jeder beliebige zur Tangentialebene eines beliebigen parabolischen, elliptischen oder Kreiskegels parallele ebene Schnitt ist eine Parabel.

Oder: Die Zentralprojektion einer Parabel, einer Ellipse oder eines Kreises auf eine zu nur einem projizierenden Strahl parallele Ebene ist eine Parabel.

Und: Die Zentralprojektion einer Parabel auf eine sämtliche Projektionsstrahlen schneidende Ebene ist eine Ellipse bezw. ein Kreis.

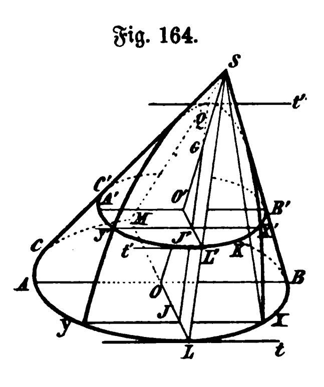
Betrachtet man die Parabel als Ellipse mit einem unendlich fernen Brennpunkt, so folgen obige Beziehungen als Sonderfälle der elliptischen Schnitte beliebiger elliptischer Kegel.

Die projektiven Eigenschaften von Pol und Polare, der Satz des Pascal und des Brianchon gelten auch für die Parabel.

Räumliche Ableitung des Durchmesserhauptsatzes.

350. Das Ebenenbüschel durch die Berührungsmantellinie SL einer an einen beliebigen elliptischen Kegel gelegten Berührungsebene schneidet die zu letzterer parallele Parabelebene nach Parallelen durch den unendlich fernen Punkt der Parabel, d. h. nach Durchmessern. Der Grundschnitt des Kegels wird von Berührungs- und Parabelebene nach der Tangente t und der zu ihr parallelen Sehne XY geschnitten. Die durch die Mitte J dieser Sehne gelegte Ebene des Büschels geht durch die Achse SO, da die Schnittgerade LJ mit der Grundebene der zu t || XY zugeordnete Durchmesser LO der Grundellipse ist. Ebene (SLO) schneidet die Parabelebene nach dem der Parabelsehne XY zugeordneten Durchmesser JQ || LS. Um zu beweisen, daß jede zu XY parallele Parabelsehne durch JQ halbiert wird schneide man den Kegel durch eine zur Grundellipse parallele Ebene. Diese schneidet die Berührungsebene nach der Tangente t' || t, die Ebene der Parabel nach X'Y' || XY, Ebene (SLO) nach L'O' || LO und die Achse SO im Mittelpunkt O' der entstehenden Schnittellipse. L'O' ist somit der X'Y' || t' zugeordnete Durchmesser der Schnittellipse, halbiert also X'Y' in J', dem Treffpunkt von X'Y' mit JQ.

Fig. 164.



Um insbesondere diejenige Ebene des Büschels LS zu finden, welche die Parabel nach der Achse schneidet, bemerke man, daß Achse und zugeordnete Sehnenschar senkrecht zu einander stehen. Schneidet man daher den Kegel durch eine zu SL senkrechte Ebene, so erzeugen Berührungs- und Parabelebene für die entstehende Schnittellipse eine Tangente nebst Parallelsehne, die beide zu LS senkrecht stehen. Die Mitte dieser Sehne bestimmt daher die gesuchte Ebene des Büschels.

Beispiele.

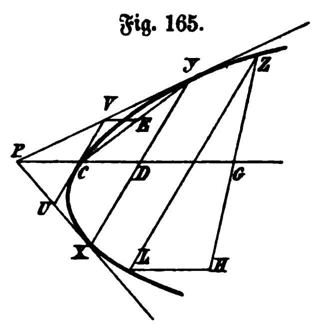
351. 1. Aufgabe: Eine Parabel sei gezeichnet. Achse, Brennpunkt und Leitlinie zu finden.

Lösung: Die Verbindungsgerade der Mitten irgend zweier paralleler Sehnen ist ein Durchmesser der Parabel und giebt daher die Achsenrichtung. Jede zu diesem Durchmesser senkrechte Sehne ist der Achse zugeordnet. Die Mitte einer solchen Sehne ist daher ein Punkt der Achse.

Ziehe im Endpunkt des zuerst bestimmten Durchmessers die zur zugeordneten Sehnenschar parallele Tangente. Das auf dieser Tangente im Schnittpunkt mit der Scheiteltangente errichtete Lot trifft die Achse im Brennpunkt u. s. f.

352. 2. Aufgabe: Von einem geg. Punkt P eine Tangente an eine Parabel zu ziehen.

Fig. 165.



Angenommen PX und PY seien die gesuchten Tangenten. Der Durchmesser durch P, der die Parabel in C treffen möge, halbiert gemäß 346), da er der Berührungssehne zugeordnet ist, XY in D. Ziehe in C die zu XY parallele Tangente UV, so halbiert aus demselben Grund der Durchmesser durch V die Berührungssehne CY der von V an die Parabel gezogenen Tangenten im Punkt E. Nun ist VE || PD, daher PV = VY und somit PC = CD, d. h.

Satz: Die durch den Schnittpunkt zweier Tangenten und die Mitte der Berührungssehne begrenzte Durchmesserstrecke wird von der Parabel halbiert;

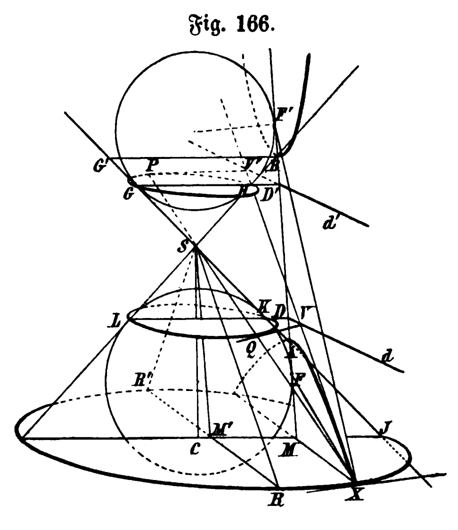
somit Zeichnung: Bestimme irgend einen Durchmesser. Ziehe durch P die Parallele. Diese trifft die Parabel in einem Punkt C. Verlängere PC um sich selbst bis D. Verbinde einen beliebigen Punkt Z der Parabel mit einem beliebigen Punkt G des Durchmessers PD und verlängere ZG um sich selbst bis H. Die Parallele durch H zu PD bestimmt den Parabelpunkt L, dann ist ZL eine dem Durchmesser PD zugeordnete Sehne, da sie von PD halbiert wird. Die Parallele durch D zu ZL bestimmt daher die Berührungspunkte X und Y der gesuchten Tangenten.

353. 3. Aufgabe: Durch fünf geg. Punkte, von welchen der eine im Unendlichen liegt, eine Parabel zu legen.

Lösung wie in 295).

Dritter Fall: Die Hyperbelschnitte.

Fig. 166.



354. Jede durch die Spitze eines senkrechten Kreiskegels gelegte Ebene (RSR'), die dessen Fläche nach zwei Mantellinien schneidet, trifft, parallel verschoben, sowohl Kegel- als Scheitelkegelfläche und erzeugt daher eine zweiästige, nicht geschlossene, stetig gekrümmte ebene Linie, die Hyperbel heißt. Dieselbe besitzt zwei unendlich ferne Punkte, die Schnittpunkte ihrer Ebene mit den zu ihr parallelen Mantellinien. In jedem dieser beiden Punkte laufen zwei Hyperbeläste zusammen.

Die Schnittgerade AB der Ebene der Hyperbel mit dem zu letzterer senkrechten Achsenschnitt des Kegels ist

Symmetriegerade für die Hyperbel und heißt, da sie die nächstliegenden Punkte beider Hyperbeläste, die Scheitel A und B, oder vielmehr, über den unendlich fernen Punkt von AB gerechnet, die entferntesten Punkte A und B verbindet, die große Achse der Hyperbel. Die beiden dem senkrechten Achsenschnitt einbeschriebenen Kreise, welche die große Achse der Hyperbel in F und F′ berühren (FF′ || SM′), erzeugen wieder die Dandelinschen Kugeln. Irgend eine Mantellinie treffe die Kreise, nach welchen diese Kugeln den Kegel berühren, in P und Q, die Schnittebene im Hyperbelpunkt X, dann ergeben die früheren Betrachtungen

$$XF' = XP \qquad \text{und} \qquad XF = XQ$$

somit

$$XF' - XF = PQ = GK = \text{konstans}$$

somit

1. Erklärung: Die Hyperbel ist Ort aller Punkte, für welche der Unterschied der beiden Entfernungen von zwei festen Punkten F und F′, den sogen. Brennpunkten, sich nicht ändert.

Oder wenn man die kleinere Entfernung XF von X aus auf der größeren XF′ abträgt und mit dem Rest dieser Strecke um F′ einen Kreis beschreibt (Fig. 171):

2. Erklärung: Die Hyperbel ist Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einen geg. Kreis berühren und durch einen außerhalb des Kreises geg. Punkt gehen.

Der Halbmesser des geg. Kreises ist der Unterschied der Brennstrahlen, der Mittelpunkt und der geg. Punkt sind die beiden Brennpunkte. Führe eine Zeichnung der Hyperbel aus auf Grund dieser Erklärung.

355. Die Mantellinien des Kegels als projizierende Strahlen der Grundkreise aufgefaßt, ergiebt sich, allerdings vorerst noch unter Voraussetzung einer besonderen Lage des Projektionsmittelpunkts, der

Satz: Die Zentralprojektion eines Kreises auf jede zu zwei projizierenden Strahlen parallele Ebene ist eine Hyperbel.

Beispiel: Der Schatten der Spitze eines senkrechten Stabs beschreibt im Lauf eines Tages einen Hyperbelast.

356. Obwohl Hyperbel und Ellipse als Zentralprojektionen des Kreises in ihren Eigenschaften völlig übereinstimmen, beide Kurven auch zwei endliche Brennpunkte besitzen, so zeigt doch das Verhalten der Hyperbel, wegen der beiden unendlich fernen Punkte dieser Kurve, wesentliche Abweichungen gegenüber der Ellipse.

Im folgenden werden einige der wichtigsten Eigenschaften der Hyperbel durch Betrachtung am Kegel abgeleitet.

Die große Achse der Hyperbel.

357. Fig. 166: Nach dem Satz über die Gleichheit der Tangenten von einem Punkt an eine Kugel folgt

$$(AB + BF') - AF = AG - AK = KG$$

und

$$(AB + AF) - BF' = BL - BH = HL$$

woraus durch Subtraktion, da $KG = HL$

$$2AF - 2BF' = 0 \text{ oder } AF = BF'$$

somit

$$AB = AF' - F'B = AG - AF = AG - AK = KG$$

daher

$$XF' - XF = AB \quad . \quad . \quad = 2a$$

d. h. der unveränderliche Unterschied der Brennstrahlen ist gleich der großen Achse. Man ist übereingekommen, die Länge AB der großen Achse der Hyperbel, in Uebereinstimmung mit der Ellipse, mit 2a zu bezeichnen.

Leitlinie (Direktrix).

358. Die Ebenen der Berührungskreise schneiden die Hyperbelebene nach den zur Hyperbelachse senkrechten Leitlinien $VD \parallel V'D'$. Zieht man $BG' \parallel DK$, so ist

$$\frac{DA}{DB} = \frac{KA}{KG'}$$

oder, da

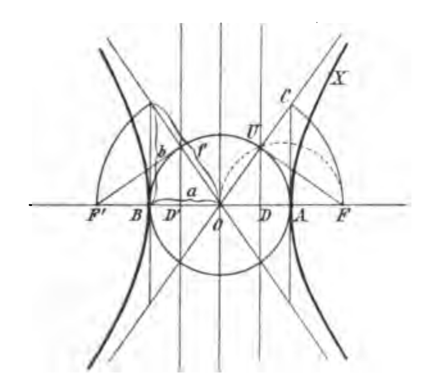
$$AK = AF \quad \text{und} \quad KG' = BL = BF$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{FA}{FB} \quad \text{ebenso} \quad \frac{D'A}{D'B} = \frac{F'A}{F'B}$$

somit

Satz: Die große Achse der Hyperbel wird durch jeden der Brennpunkte und seine zugehörige Leitlinie harmonisch geteilt.

Fig. 167.



Zugleich folgt $DA = D'B$, d. h. Leitlinien wie Brennpunkte liegen symmetrisch bezüglich des Mittelpunkts.

359. Da $JM \parallel DK$, so folgt mit Berücksichtigung von 358)

$$\frac{JK}{MD} = \frac{AK}{AD} = \frac{AF}{AD} = \frac{BF}{BD}$$

$$= \frac{BF - AF}{BD - AD} = \frac{AB}{DD'} = \frac{OA}{OD}$$

wobei O der Mittelpunkt der Hyperbel ist, und da der F zugeordnete harmonische Punkt D durch die Berührungssehne der von F an den Kreis über AB als Durch-

messer gezogenen Tangenten bestimmt wird, die Berührungssehne somit Leitlinie ist, so folgt (Fig. 167)

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OU}{OD} = \frac{OF}{OU} = \frac{OF}{OA}$$

Berücksichtigt man, daß in Fig. 166

$$JK = XQ = XF$$

und, wenn $XE \perp DV$, auch

$$MD = XE$$

so folgt

$$\frac{XF}{XE} = \frac{OF}{OA} = \frac{f}{a} = \varepsilon\ (> 1)$$

somit

Satz: Die Hyperbel ist Ort aller Punkte, deren Abstandsverhältnis von einem geg. Punkt, dem Brennpunkt, und einer geg. Geraden, der diesem Brennpunkt zugehörigen Leitlinie, sich nicht ändert.

Dieses Abstandsverhältnis ist das Verhältnis der halben Brennweite zur halben großen Achse und heißt Exzentrizität.

Die Exzentrizität der Hyperbel ist stets größer als 1.

Bedeutung der Worte Ellipse, Parabel, Hyperbel.

360. Die Bezeichnungen Ellipse, Parabel, Hyperbel beziehen sich auf den Wert der Exzentrizität, d. h. des für jede der drei Kurven unveränderlichen Abstandsverhältnisses eines Kurvenpunkts von einem festen Punkt, dem Brennpunkt, und einer festen Geraden, der zugehörigen Leitlinie. Es ist für

die Ellipse $\frac{f}{a} = \varepsilon < 1$

die Parabel $\frac{f}{a} = \varepsilon = 1$

die Hyperbel $\frac{f}{a} = \varepsilon > 1$;

es findet also für die Ellipse ein Zurückbleiben ἐλλείπειν
die Parabel ein Gleichkommen παραβάλλειν
die Hyperbel ein Uebertreffen ὑπερβάλλειν

des einen Abstands bezüglich des anderen statt.

Brennpunkte und Tangente.

361. Die durch die Mantellinie SX gelegte Berührungsebene des Kegels schneidet die Hyperbelebene nach der Hyperbeltangente in X, die mit den gleichzeitig erzeugten Tangenten QV und PV′ der Berührungskreise in den Punkten V und V′ der Leitlinien zusammentrifft. Dann folgt aus

$$\triangle XFV \cong \triangle XQV$$
$$\sphericalangle XFV = \sphericalangle XQV = 90^\circ$$

d. h. Satz 331).

362. Ferner folgt

$$\sphericalangle\, FXV = \sphericalangle\, VXQ$$

und, da

$$\triangle\, XF'V' \cong \triangle\, XPV' : \sphericalangle\, F'XV' = \sphericalangle\, VXP$$

somit

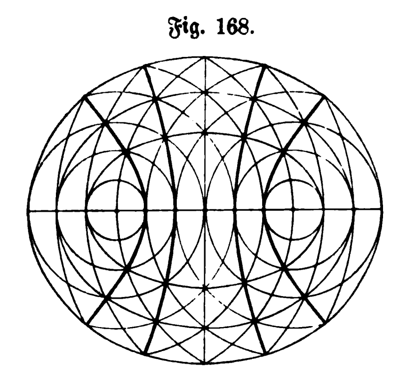
$$\sphericalangle\, FXV = \sphericalangle\, F'XV$$

d. h.

Satz: Die Tangente halbiert den Winkel der Brennstrahlen zum Berührungspunkt.

Konfokale Ellipsen und Hyperbeln.

Fig. 168.



363. Da die Halbierungslinie des Außenwinkels der Brennstrahlen Tangente einer Ellipse ist, welche dieselben Brennpunkte hat, wie die Hyperbel, so folgt

Satz: Ellipsen und Hyperbeln mit denselben Brennpunkten durchschneiden sich rechtwinklig,

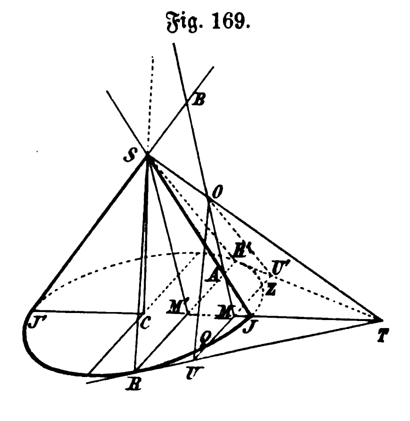
oder: Konfokale Ellipsen und Hyperbeln bilden ein orthogonales System.

Zeige in der Anordnung der Fig. 168 die Richtigkeit der Sätze $r \pm r' =$ konstans.

Asymptoten.

364. Die Hyperbelebene sei parallel der Ebene der Mantellinien SR und SR'. Die durch diese Mantellinien gelegten Berührungsebenen des Kegels schneiden die Hyperbelebene nach den zu SR und SR' parallelen Tangenten OU und OU' in den unendlich fernen Punkten der Hyperbel, den sogen. Asymptoten. Die Bezeichnung rührt her von ἀ σὺν πίπτω = nicht zusammen fallen. Diesen Geraden, welche die Kurve im Unendlichen berühren, nähern sich nämlich die Hyperbeläste vom Scheitel aus ungemein rasch und stark, so daß die Krümmung der Hyperbel bald eine sehr schwache wird; trotz dessen findet im Endlichen kein gänzliches Zusammenfallen der Geraden und der Kurve statt.

Fig. 169.



Wie die Berührungsmantellinien SR und SR', so liegen die Asymptoten OU || SR und OU' || SR' zum senkrechten Achsenschnitt und somit auch zur großen Achse symmetrisch.

Da sich die Berührungsebenen nach der, bezüglich des Grundkreises JQRJ', zum Pol T von RR' führenden Geraden

ST schneiden, so ist S — TJM′J′ ein harmonisches Strahlenbüschel, und da MB ∥ M′S, so ist OA = OB, d. h.

Satz: Die Asymptoten schneiden sich im Mittelpunkt der großen Achse.

365. Da für den unendlich fernen Punkt Tangente und Brennstrahl parallel sind und das im Brennpunkt auf dem Brennstrahl errichtete Lot die Tangente in einem Punkt der Leitlinie trifft, so bestimmt (Fig. 167) der Schnittpunkt U des Halbkreises über OF mit der Leitlinie die Asymptote OU. Zieht man UA und UB, so ist $\sphericalangle AUF = \sphericalangle AUD$, somit, da gemäß 358) U — FADB ein harmonisches Strahlenbüschel, UA ⊥ UB, d. h. U liegt auch auf dem Kreis über der großen Achse als Durchmesser.

Die Asymptoten sind somit die Halbmesser nach den Berührungspunkten der Tangenten von einem Brennpunkt an den über der großen Achse 2a als Durchmesser beschriebenen Kreis.

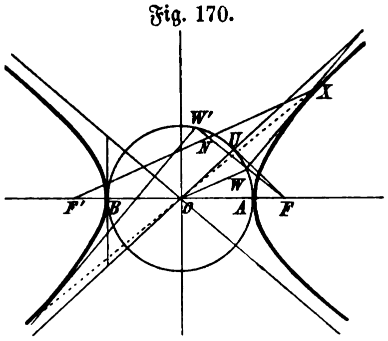
366. Die in A zur großen Achse senkrechte Scheiteltangente treffe die Asymptote OU im Punkte C, dann ist

$$\triangle OAC \cong \triangle OUF \quad \text{somit} \quad OC = OF = f$$

d. h.

Die Asymptoten sind die Strahlen vom Mittelpunkt nach den Schnittpunkten der Scheiteltangenten und des um den Mittelpunkt mit der halben Brennweite beschriebenen Kreises.

Fig. 170.



367. Man erhält dieses Ergebnis auch aus Fig. 170 durch folgende Betrachtung: Da der Kreis um X mit XF denjenigen um F′ mit AB = 2a in N berührt und die Tangente in X den Winkel der Brennstrahlen halbiert, so ist, wenn FN gezogen wird, FW = WN

und da FO = OF′ so folgt

$$OW \parallel F'N \text{ und } OW = \frac{1}{2} F'N = a,$$

d. h.

Satz: Der um den Mittelpunkt mit der halben großen Achse beschriebene Kreis ist Ort für die Fußpunkte aller Lote, die von den Brennpunkten auf die Tangenten gefällt werden,

oder: Zieht man von einem Punkt außerhalb eines Kreises Strahlen nach sämtlichen Punkten desselben, so umhüllen die in diesen Punkten errichteten Lote eine Hyperbel.

Da die Tangente im unendlich fernen Punkt durch O geht, so ist in diesem besonderen Fall das Lot FU vom Brennpunkt auf die Asymptote Tangente an den um O mit a beschriebenen Kreis.

Wie lautet obiger Satz für die Ellipse und Parabel?

Die kleine Achse der Hyperbel.

368. Dem bei der Ellipse von den beiden Halbachsen und der halben Brennweite gebildeten rechtwinkligen Dreieck entspricht bei der Hyperbel das rechtwinklige $\triangle$ OAC. Man ist daher übereingekommen, AC als die reelle kleine Halbachse b der Hyperbel zu bezeichnen. Dann ist im $\triangle$ OAC

$$a^2 + b^2 = f^2$$

eine Beziehung, die mit derjenigen für die Ellipse übereinstimmt, sobald die reelle kleine Achse der Ellipse imaginär wird:

$$a^2 - (ib)^2 = f^2$$

d. h. die Hyperbel kann als Ellipse mit einer imaginären Hauptachse betrachtet werden.

Die in O zur großen Achse AB senkrechte zweite Symmetriegerade der Hyperbel wird als kleine Achse der Hyperbel bezeichnet. Obwohl sie die Hyperbel nicht schneidet, so sagt man doch in Uebereinstimmung mit der Ellipse, sie werde von der Hyperbel in den imaginär konjugierten Endpunkten $+ib$ und $-ib$ getroffen.

369. Aufgabe: Welche Beziehung besteht zwischen den Abständen eines Hyperbelpunkts von den beiden Hauptachsen?

Sind r und r' die Brennstrahlen nach dem Hyperbelpunkt und x und y seine Abstände von der kleinen und großen Achse, so ist (Fig. 171)

$$r + r' = 2a \quad \ldots \quad 1)$$

$$r^2 = (x + f)^2 + y^2 \quad \ldots \quad 2)$$

$$r'^2 = (f - x)^2 + y^2 \quad \ldots \quad 3)$$

$$(r + r')(r - r') = 4fx \quad \ldots \quad 2) - 3)$$

Aus

$$r - r' = 2\frac{f}{a}x \qquad r + r' = 2a$$

folgt

$$r = a + \frac{f}{a}x \qquad r' = a - \frac{f}{a}x \quad \ldots \quad 4)$$

Diese Werte in 2) + 3) eingesetzt, folgt

$$\left(a + \frac{f}{a}x\right)^2 + \left(a - \frac{f}{a}x\right)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2f^2$$

oder

$$a^2 + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + y^2 + f^2$$

woraus

$$\frac{f^2 - a^2}{a^2}x^2 - y^2 = f^2 - a^2$$

oder, da gemäß 368)

$$f^2 - a^2 = b^2$$

nach einiger Umformung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

in Uebereinstimmung mit Satz 368) auch geschrieben:

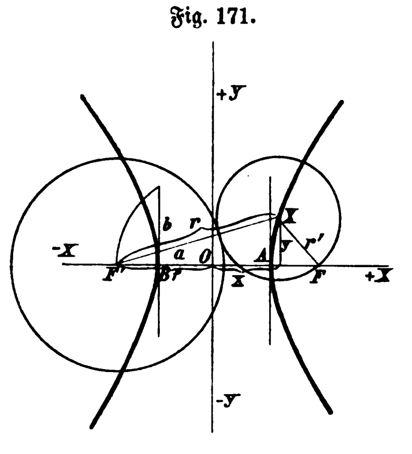
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(i\,b^2)} = 1$$

Da nur diejenigen Punkte auf der Hyperbel liegen, deren Achsenabstände der gefundenen Bedingung genügen, so heißt

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Hyperbel.

Fig. 171.



370. Hat die Hyperbel gleiche Achsen a = b, so heißt sie gleichseitig und ihre Gleichung lautet

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Dagegen sagt

$$x^2 + y^2 = a^2$$

daß alle Punkte, deren Achsenabstände dieser Bedingung genügen, vom Achsenschnittpunkt O gleiche Entfernung a haben. Letztere Gleichung ist daher die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt O und Halbmesser a.

Die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel halbieren die Winkel der Hauptachsen und stehen zu einander senkrecht.

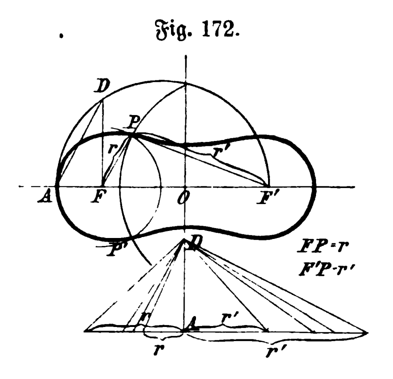
371. Bewegt sich ein Punkt P so, daß seine Entfernungen von zwei festen Punkten sich, den vier Grundrechnungsarten entsprechend, konstant ändern, so beschreibt er für

$r + r' = 2a$	eine Ellipse	1)
$r - r' = 2a$	eine Hyperbel	2)
$r \,.\, r' = k^2$	eine Lemniskate	3)
$\frac{r}{r'} = \frac{m}{n}$	einen Kreis	4)

Auffallend ist, daß für die Division der Kreisauftritt als Sonderfall der Ellipse.

Zeichnung der Lemniskate: Macht man die geg. Strecke k zur Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks, so findet man zu jedem beliebigen Strahl r den zugehörigen r' mittels des Satzes über das Quadrat der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks. Die Kreise um die geg. Punkte F und F' mit den Halbmessern r und r' geben vier Punkte der zu F F' und dem Mittellot von F F' symmetrischen Kurve.

Fig. 172.



Lemniskaten entstehen beim Durchgang polarisierten Lichts durch optisch zweiachsige Krystalle. (Arragonit, Kalisalpeter.)

Der Kreis $\frac{r}{r'} = \frac{m}{n}$ ist der Kreis des Apollonius über dem Abstand derjenigen beiden Punkte als Durchmesser, welche die Verbindungsstrecke der beiden geg. Punkte innen und außen im selben Verhältnis $\frac{m}{n}$ teilen.

Parallel- und Zentralprojektion der Hyperbel.

372. Dieselben Betrachtungen wie bei Ellipse und Parabel ergeben

Satz: Jede Parallelprojektion der Hyperbel ist wieder eine Hyperbel.

Satz: Jeder hyperbolische, parabolische, elliptische oder Kreiskegel wird von jeder zu zwei Mantellinien parallelen Ebene nach einer Hyperbel geschnitten;

oder: Die Zentralprojektion einer Hyperbel, Parabel, Ellipse oder eines Kreises auf eine zu zwei Projektionsstrahlen parallele Bildebene ist eine Hyperbel (Bemerkung 336 Schluß)

und: Die Zentralprojektion einer Hyperbel auf eine zu nur einem Projektionsstrahl parallele Ebene ist eine Parabel;

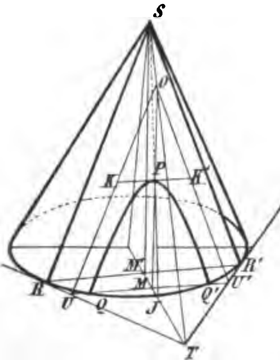
und: Die Zentralprojektion einer Hyperbel auf eine sämtliche Projektionsstrahlen schneidende Ebene ist eine Ellipse oder ein Kreis.

Durchmesser.

373. Die Sätze über die Durchmesser ergeben sich ganz allgemein aus der Betrachtung des hyperbolischen Schnitts des elliptischen Kegels:

Die zu (RSR′) parallele Hyperbelebene schneidet die Grundellipse nach der zu RR′ parallelen Sehne QQ′, welche verlängert die in R und R′ gezeichneten Tangenten in U und U′ trifft. Sie schneidet die durch SR und SR′ gelegten Berührungsebenen nach den zu diesen Mantellinien parallelen Asymptoten UO und U′O, deren Schnittpunkt O, der Mittelpunkt der Hyperbel, auf der Schnittgeraden ST der Berührungsebenen liegt. Der den Ellipsensehnen RR′ || QQ′ zugeordnete Durchmesser JJ′ geht durch die Mitten M und M′ dieser Sehnen und durch den Schnittpunkt T der Ellipsentangenten in R und R′. Da diese Betrachtung für jeden Parallelschnitt zur Grundellipse gilt, welches auch die Lage der letzteren sein mag, QQ′ aber zugleich Hyperbelsehne ist und die durch Durchmesser M′T und Kegelspitze S gelegte Ebene die Ebene (RSR′) und die Hyperbelebene nach M′S || MO schneidet, so folgt,

Fig. 173.



daß die Mitten aller zu QQ' parallelen Hyperbelsehnen auf OM liegen und im besonderen Fall die im Schnittpunkt P von OM mit SJ, d. h. mit der Hyperbel gezeichnete Parallelsehne KK' Tangente der Hyperbel ist. Daher

Satz: Die Mitten paralleler Hyperbelsehnen liegen auf einer durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehenden Geraden dem der Parallelsehnenschar zugeordneten Durchmesser.

Satz: Die Tangenten in den Schnittpunkten eines Durchmessers mit der Hyperbel sind der zugeordneten Sehnenschar parallel.

374. Der einer Parallelsehnenschar parallele Durchmesser heißt dem, die Mitten der Schar verbindenden Durchmesser zugeordnet oder konjugiert.

Diejenigen Durchmesser, welche in den, der kleinen Achse zugehörigen Scheitelwinkelflächen der Asymptoten liegen, schneiden die Hyperbel nicht; alle anderen Durchmesser dagegen treffen die Hyperbel in zwei Punkten.

Von zwei zugeordneten Durchmessern schneidet immer nur einer die Hyperbel (in zwei Punkten), der andere dagegen nicht.

Jeder Durchmesser der Hyperbel wird vom Mittelpunkt der letzteren halbiert.

375. Die in Q und Q' an den Kegel gelegten Berührungsebenen, bestimmt durch S und die in Q und Q' an die Grundellipse gezogenen Tangenten EV und E'V, welche sich in V auf dem QQ' || RR' zugeordneten Durchmesser MT treffen, schneiden die Ebene der Hyperbel nach den, zu ihren Schnittgeraden ES und E'S mit Ebene (RSR') parallelen Hyperbeltangenten QD und Q'D. Da deren Schnittpunkt D zugleich der gemeinsame Schnittpunkt beider Berührungsebenen und der Hyperbelebene ist, die Schnittgerade SV ersterer aber die Hyperbelebene im Schnittpunkt mit dem der Hyperbelsehne QQ' zugeordneten Hyperbeldurchmesser MO || M'S trifft, so folgt

Satz: Die in den Endpunkten einer Hyperbelsehne gezeichneten Tangenten schneiden sich in einem Punkt des der Hyperbelsehne zugeordneten Durchmessers.

376. Fig. 173. Aus

$$\frac{PK}{PK'} = \frac{MU}{MU'} = \frac{M'R}{M'R'} \quad \text{folgt} \quad PK = PK'$$

d. h.

Satz: Das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Hyperbeltangente wird durch den Berührungspunkt halbiert.

377. Fig. 173. Aus

$$MU = MU' \quad \text{und} \quad MQ = MQ'$$

folgt

$$UQ = U'Q'$$

d. h.

Satz: Auf jeder Hyperbelsekante sind die beiden äußeren, zwischen Hyperbel und Asymptoten liegenden Abschnitte einander gleich.

Wird die Sekante zur Tangente, so folgt als Sonderfall 376).

Hiernach ergiebt sich eine einfache Zeichnung der Hyperbel aus den Asymptoten und einem beliebigen Punkt Q: Lege durch Q ein Strahlenbüschel und trage auf jedem Strahl die zwischen Q und dem Schnittpunkt U mit der einen Asymptote liegende Strecke vom Schnittpunkt U' mit der anderen Asymptote aus gegen Q hin ab, so ist der Endpunkt ein weiterer Punkt der Hyperbel. Verbinde die so erhaltenen Punkte durch eine stete Linie aus freier Hand.

Um die Tangente in Q zu erhalten, hat man durch Q eine Gerade zu ziehen, so daß das zwischen die Asymptoten fallende Stück derselben in Q halbiert wird (mit Hilfe eines Parallelogramms).

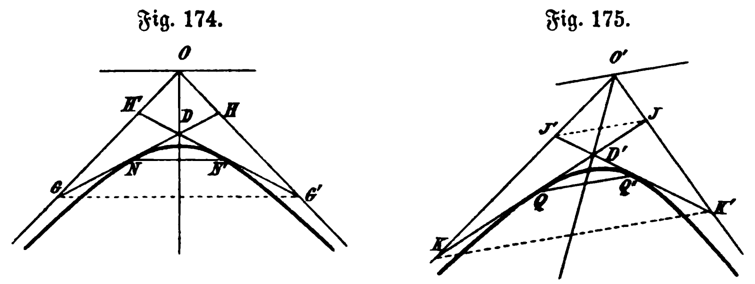
Flächensätze.

378. Die in den Endpunkten N und N' einer zur Achse senkrechten Sehne gezeichneten Hyperbeltangenten bestimmen mit den Asymptoten zwei aus Gründen der Symmetrie flächengleiche Dreiecke:

$$\triangle\, GOH \cong \triangle\, G'OH'$$

Geht die Hyperbel durch Parallelprojektion in eine andere über, wird also aus NN' || GG' und der Achse das Parallelsehnenpaar QQ' || KK' nebst dem

Fig. 174. Fig. 175.



zugeordneten Durchmesser O'D, so folgt, da hierbei gleiche Flächen sich wieder flächengleich abbilden, auch

$$\triangle\, KO'J = \triangle\, K'OJ'$$

und da QQ' als ganz beliebige, nur von der Richtung der projizierenden Strahlen abhängige Sehne betrachtet werden kann,

Satz: Sämtliche Dreiecke, welche die Hyperbeltangenten mit den Asymptoten bilden, sind flächengleich.

Die Schnittgeraden zweier paralleler Tangenten mit den Asymptoten sind die Ecken eines Konjugierten-Parallelogramms, somit, da die Fläche des letzteren das Vierfache derjenigen des Dreiecks beträgt, welches von einer der Tangenten mit den Asymptoten bestimmt wird,

Satz: Alle Konjugierten-Parallelogramme der Hyperbel sind flächengleich.

379. Da die Flächen von Dreiecken, die einen Winkel gemein haben, sich verhalten wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten, so folgt, da die durch die Tangenten und Asymptoten bestimmten Dreiecke flächengleich sind,

Satz: Die Produkte aus den von den Tangenten auf den Asymptoten erzeugten Abschnitten, vom Mittelpunkt der Hyperbel aus gemessen, sind konstant, oder die Rechtecke aus diesen Abschnitten sind flächengleich.

380. Aus dem besonderen Fall der Scheiteltangente ergiebt sich die unveränderliche Dreiecksfläche zu

$$\Delta = a b$$

und das unveränderliche Produkt gleich dem Quadrat f^2 über der halben Brennweite.

Beispiele.

381. 1. Aufgabe: In einem geg. Punkt P einer Hyperbel eine Tangente zu zeichnen.

1. Lösung: Halbiere den Winkel, welchen die Brennstrahlen nach P einschließen.

2. Lösung: Zeichne eine Sehne der zu OP konjugierten Parallelsehnenschar. Verlängere zu diesem Zweck eine von einem beliebigen Hyperbelpunkt Q nach OP gezogene Strecke um sich selbst, dann bestimmt die Parallele zu OP durch den erhaltenen Endpunkt einen Schnittpunkt Q′ mit der Hyperbel und hiermit die Richtung QQ′ der gesuchten Tangente.

382. 2. Aufgabe: Von einem geg. Punkt P außerhalb der Hyperbel an diese eine Tangente zu ziehen.

1. Lösung: Der Kreis um P mit PF schneidet denjenigen um F′ mit 2a in zwei Punkten N und N′. Die Mittellote zu FN und FN′ sind die gesuchten Tangenten. Die Strahlen F′N und F′N′ bestimmen die Berührungspunkte.

2. Lösung: Ziehe von P aus drei beliebige Sekanten, welche die Hyperbel in A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 schneiden. Die Schnittpunkte der Geraden A_1B_2 und A_2B_1, A_2B_3 und A_3B_2, A_3B_1 und A_1B_3 liegen auf einer Geraden, der Polare des Punkts P. Diese trifft die Hyperbel in den gesuchten Berührungspunkten. Zwei Lösungen.

Dieselbe Lösung besteht für Ellipse und Parabel. Beweis durch Zentralprojektion der entsprechenden Kreisaufgabe.

383. 3. Aufgabe: Parallel einer Geraden eine Tangente an eine Hyperbel zu legen.

Lösung: Ziehe zwei der geg. Geraden parallele Sehnen. Die Verbindungsgerade ihrer Mitten, d. h. der den Sehnen zugeordnete Durchmesser, trifft die Hyperbel in den gesuchten Berührungspunkten.

Sonderfall der Lösung (382. 2): Ziehe drei parallele Sehnen, so erhält man durch kreuzweise Verbindung der Endpunkte zwei bezw. drei Punkte des den

Sehnen zugeordneten Durchmessers. Dies ist zugleich ein einfaches Verfahren, die Mitten der Sehnen zu bestimmen.

384. 4. Aufgabe: Eine Kugel ruht auf einer horizontalen Ebene. Wie ist ein Licht zu stellen, damit der Schatten der Kugel auf diese Ebene eine Ellipse, Parabel, Hyperbel wird?

Antwort: Die Entfernung des Lichts von der Ebene ist größer, gleich, kleiner als der Durchmesser der Kugel.

Ueberblick über die Kegelschnitte.

385. Das Gesamtergebnis der seitherigen Betrachtungen ist somit

1. Der Kreiskegel kann durch eine Ebene nur nach drei Arten von Kurven geschnitten werden oder, es können nur drei Arten von ebenen Kurven auf der Kreiskegelfläche gezeichnet werden. Diese „Kegelschnitte" sind je nach Lage der Ebene:

   a) die Ellipse, Sonderfall der Kreis,
   b) die Parabel, Sonderfall die Gerade,
   c) die Hyperbel, Sonderfall das Geradenpaar.

   Mit anderen Worten

   Satz: Die Zentralprojektion eines Kreises auf eine Ebene ist ein Kegelschnitt.

2. Jeder ebene Schnitt des elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Kegels ist wieder ein Kegelschnitt, oder

   Satz: Jeder Kegelschnitt ist die Zentralprojektion eines anderen.

3. Wird der Kegel zum Cylinder, so zeigt sich: Jede den Mantellinien nicht parallele Ebene schneidet den elliptischen Cylinder nur nach Ellipsen, den parabolischen nur nach Parabeln, den hyperbolischen nur nach Hyperbeln, oder

   Satz: Die Parallelprojektion eines Kegelschnitts ist stets ein Kegelschnitt derselben Art.

4. Sämtliche Kreiseigenschaften, die bei zentraler Projektion sich nicht ändern, behalten Geltung für die Kegelschnitte, so insbesondere:

   Die Kegelschnitte sind die einzigen Kurven,

welche von einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten werden.	an welche von einem Punkt aus höchstens zwei Tangenten gezogen werden können.

   Die Kegelschnitte heißen daher auch, nach der Anzahl der

Schnittpunkte mit einer Geraden,	Tangenten von einem Punkt aus,
Kurven zweiter Ordnung.	Kurven zweiter Klasse.

Für sämtliche Kegelschnitte gelten dieselben
Sätze über Pol und Polare,

ferner

der Satz des Pascal:	der Satz des Brianchon:
Die drei Schnittpunkte der Gegenseiten eines Sehnensechsecks liegen in einer Geraden	Die drei Verbindungsgeraden der Gegenecken eines Tangentensechsecks gehen durch einen Punkt

mit ihren Sonderfällen, wenn

die Sehnen zu Berührungsgeraden werden,	die Ecken zu Berührungspunkten werden,

und bezüglich der Bestimmungsstücke

Satz: Jeder Kegelschnitt ist durch fünf voneinander unabhängige Bedingungen eindeutig bestimmt.

Folgerungen für die ebene Geometrie.

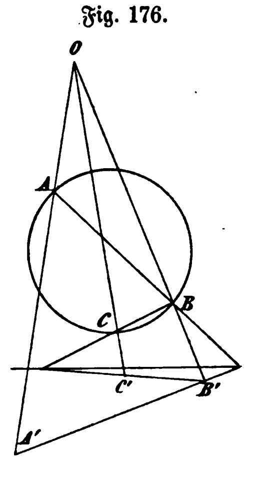
386. Bildet man die Kegelschnitte von einem beliebigen Projektionsmittelpunkt aus auf eine zu einem Kreisschnitt des Kegels parallele Bildebene ab, so sind die beiden Projektionen, Kreis- und Kegelschnitt, in der Bildebene zentralprojektiv aufeinander bezogen, d. h. auch in der Ebene gilt der

Satz: Die Kegelschnitte sind die zentralprojektiven Bilder des Kreises.

Die Projektion der Kegelspitze giebt den Projektionsmittelpunkt, diejenige der Schnittgeraden von Kreis und Kegelschnittsebene im Raum die Kollineationsachse der Bildebene.

386a. Zu jedem Kegelschnitt läßt sich daher in derselben Ebene ein Kreis angeben, dessen zentralprojektives Bild er ist, und umgekehrt läßt sich aus jedem Kreis durch Zentralprojektion (also bloß mit Hilfe des Lineals) ein Kegelschnitt derselben Ebene zeichnen.

Fig. 176.



Gemäß früher sind zentralprojektive (kollineare) Bilder eindeutig bestimmt durch drei Paare zugeordneter Grundgebilde (Punkte oder Gerade). Man erhält daher z. B.:

a) Die Ellipse aus drei endlichen Punkten A', B', C', die drei beliebigen Kreispunkten A, B, C zugeordnet sind. Fig. 176.

b) Die Parabel aus einem endlichen Punkt A' und einem unendlich fernen Punkt B', zugeordnet den endlichen Kreispunkten A und B. Denn, da die Tangente im unendlich fernen Punkt der Parabel selbst unendlich fern liegt und daher die Kollineationsachse im Unend-

lichen trifft, so ist die Richtung der durch den Schnittpunkt von BA und B'A' gehenden Achse durch die Kreistangente in B bestimmt. Bedeutung der Richtung OBB'? Fig. 177.

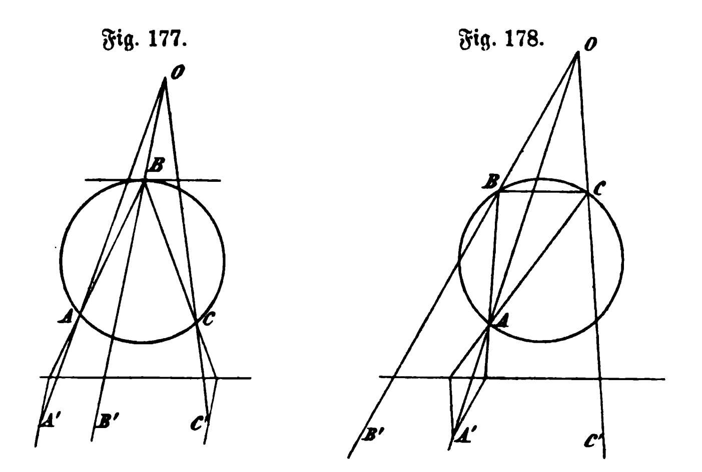


Fig. 177. Fig. 178.

c) Die Hyperbel aus einem endlichen Punkt A' und zwei unendlich fernen Punkten B' und C', zugeordnet den endlichen Kreispunkten A, B, C. Die Verbindungsgeraden BB' und CC' bestimmen den Projektionsmittelpunkt O. Da die Verbindungsgerade B'C' der beiden unendlich fernen Hyperbelpunkte selbst im Unendlichen liegt, so läuft die Kollineationsachse, bestimmt durch die Schnittpunkte von AC mit A'C' || OC und AB mit A'B' || OB, der dieser unendlich fernen Hyperbelsehne zugeordneten Kreissehne BC parallel (geometrischer Beweis?). Die den Kreistangenten in B und C zugeordneten Geraden sind die Asymptoten. Fig. 178.

387. Projiziert man zwei beliebige Kegelschnitte desselben Kegels von einem beliebigen Mittelpunkt aus auf eine beliebige Bildebene, so sind die Projektionen in dieser Ebene selbst wieder zentralprojektiv. Somit gilt auch in der Ebene der

Satz: Die Zentralprojektion eines Kegelschnitts ist wieder ein Kegelschnitt.

Wie ist die Zuordnung der Grundgebilde zu treffen, um z. B. aus einer vorliegenden Hyperbel durch Zentralprojektion eine Parabel u. s. f. zu erhalten?

388. Eine beliebige Parallelprojektion zweier ebener Schnitte eines Cylinders, der einen beliebigen Kegelschnitt zur Leitlinie hat, auf eine Ebene ergiebt in letzterer zwei selbst wieder parallelprojektive Kegelschnitte derselben Art wie die Leitkurve. Somit gilt auch in der Ebene der

Satz: Die Parallelprojektion eines Kegelschnitts ist ein Kegelschnitt derselben Art.

Die Umdrehungsflächen der Kegelschnitte.

389. Die von Ellipse, Parabel, Hyperbel durch Umdrehung um eine Hauptachse als feste Drehachse beschriebenen Umdrehungs-(Rotations-)flächen sind

a) das Rotationsellipsoid,
b) das Rotationsparaboloid,
c) das einmantelige Rotationshyperboloid,
d) das zweimantelige Rotationshyperboloid,

das einmantelige, wenn die imaginäre, das zweimantelige, wenn die reelle Achse der Hyperbel Drehachse ist.

Schnittverhältnisse.

390. Jede Ebene durch die Drehachse schneidet nach dem erzeugenden Kegelschnitt, jede zur Achse senkrechte Ebene nach einem Parallelkreis. Alle anderen Ebenen schneiden

das Rotationsellipsoid nach Ellipsen;
das Rotationsparaboloid nach Ellipsen, nach Parabeln, wenn die Schnittebene parallel der Drehachse;
das ein- und zweimantelige Rotationshyperboloid nach einem Kegelschnitt derselben Art, wie derjenige, nach welchem der von den Asymptoten beschriebene Asymptotenkegel geschnitten wird.

Der Asymptotenkegel berührt das Hyperboloid im Unendlichen.

Berührungsverhältnisse.

391. Der Begriff des Berührens schließt folgenden allgemeinen Satz in sich.

Satz: Berühren sich zwei beliebige Flächen in einzelnen Punkten oder längs gewisser Linien, so erzeugt jede Schnittebene der Flächen durch einen der Berührungspunkte zwei Kurven, die sich in jenem Punkte berühren.

Wird die eine Fläche zur Ebene, so lautet der

Satz: Die Berührungsebene an eine Fläche wird von allen durch den Berührungspunkt gelegten Schnittebenen der Fläche nach Geraden geschnitten, welche Tangenten an die jeweiligen Schnittkurven der Fläche sind.

Unter welchen Bedingungen wird eine Gerade eine Fläche berühren?

392. Ist insbesondere die berührte Fläche eine Umdrehungsfläche, so sind zwei ausgezeichnete ebene Kurven durch jeden Punkt derselben bekannt:

a) der erzeugende Meridian als Achsenschnitt,
b) der Parallelkreis senkrecht zur Achse. Somit (vergl. 239)

Satz: Die Berührungsebene an eine Umdrehungsfläche schneidet die durch den Berührungspunkt gehenden Ebenen des Meridians und des Parallelkreises nach deren Tangenten, und ist somit Berührungsebene des Kegels, den die im

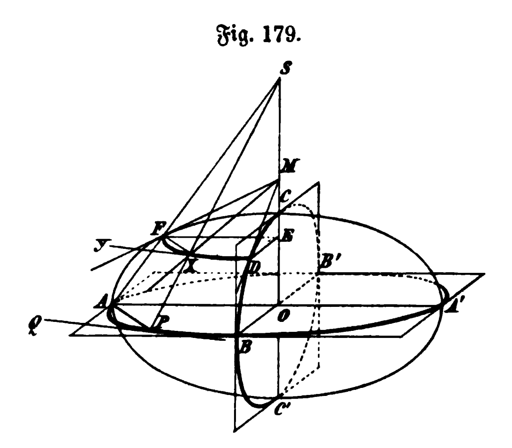
Berührungspunkt an den Meridian gezogene Tangente bei ihrer Umdrehung um die Achse beschreibt.

Ist es möglich, die beiden Tangenten an Meridian und Parallelkreis zu zeichnen, so ist hierdurch die Tangentialebene bestimmt.

393. Aufgabe: In einem geg. Punkt eines Umdrehungsellipsoids eine Berührungsebene zu legen.

Lösung: Um einen beliebigen Punkt X auf dem durch den erzeugenden Achsenschnitt CAC'A' geg. Ellipsoid anzugeben, ist zu berücksichtigen, daß je zwei Parallelkreise ähnlich liegen. AP sei eine Sehne des von der großen Achse AO beschriebenen Hauptsymmetrieschnitts. Ziehe durch einen beliebigen Punkt F der erzeugenden Ellipse FX || AP und FE || AO, so bestimmt EX || OP auf FX einen Punkt X des Ellipsoids; zur Probe schneiden sich AF und PX in einem Punkt S der Achse CC'. Die in F an die erzeugende Ellipse gelegte Tangente trifft die Achse in M und bestimmt MX als Tangente des durch X gehenden Meridians CXC'; zieht man daher XY parallel der in P an den Kreis ABA'B' gelegten Tangente, so ist (MXY) die gesuchte Berührungsebene.

Fig. 179.



Das einmantelige Umdrehungshyperboloid.

394. Wegen gewisser Beziehungen zu Kegel und Cylinder sei das einmantelige Umdrehungshyperboloid im folgenden etwas näher betrachtet.

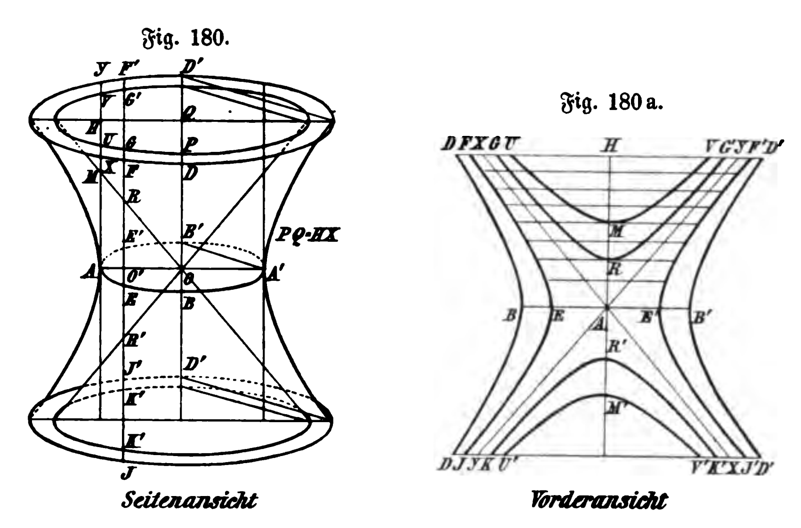
Mit wachsender Entfernung vom Mittelpunkt nähern sich die konzentrischen Parallelkreise des Hyperboloids und Asymptotenkegels, welche durch die zur Achse senkrechten Ebenen ausgeschnitten werden, mehr und mehr; in unendlicher Entfernung fallen sie zusammen, d. h.

Satz: Hyperboloid und Asymptotenkegel berühren sich nach dem unendlich fernen Parallelkreis.

Parallelschnitte zur Achse.

395. Jede zur Achse parallele Ebene (in nebenstehender Figur der Einfachheit halber senkrecht zur Ebene des Papiers) schneidet den Asymptotenkegel nach der zu den Achsen EE' und RR' symmetrischen Hyperbel GRG' — KR'K', das Hyperboloid nach einer zweiästigen, zu denselben Geraden symmetrischen Kurve

FEJ — F'E'J', die sich nach dem über die konzentrischen Parallelkreise Gesagten in ihrem ganzen Verlauf der Hyperbel GRG' stetig nähert bis zu den Schnittpunkten mit dem unendlich fernen Parallelkreis, der Berührungslinie der Hyperboloid- und Asymptotenkegelfläche. In diesen Punkten haben somit beide Kurven gemeinschaftliche Tangenten, d. h. die Asymptoten der Hyperbel sind zugleich



Asymptoten der Schnittkurve des Hyperboloids, und da wegen ihrer steten Annäherung an die Hyperbel diese Schnittkurve im allgemeinen von einer Geraden ihrer Ebene auch nur in ebensoviel Punkten geschnitten werden kann wie die Hyperbel, d. h. in nicht mehr als zwei, so folgt, daß diese Schnittkurve selbst eine Kurve zweiter Ordnung mit zwei Asymptoten, d. h. eine Hyperbel ist. Somit

Satz: Alle zur Achse parallelen ebenen Schnitte des Hyperboloids sind Hyperbeln.

Das einmantelige Umdrehungshyperboloid eine Regelfläche.

396. Wird die zur Achse parallele Ebene zur Berührungsebene des Hyperboloids, so fallen beide Scheitel EE' der Schnitthyperbel mit dem Berührungspunkt A zusammen, d. h. die Hyperbel zerfällt in die beiden zur Scheiteltangente AH der erzeugenden Hyperbel symmetrischen Geraden AX und AY, welche für die zugleich erzeugte Schnitthyperbel (VMU) des Asymptotenkegels Asymptoten sind. Man sagt: „Die Hyperbel zerfällt in eine Doppelgerade.“

Da jeder Achsenschnitt durch Drehung in die Ebene der Papiers gebracht werden kann, obige Betrachtung also für jeden Punkt des Hauptparallelkreises ABA'B' gilt, so folgt

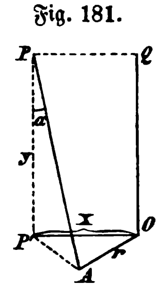
Satz: Das einmantelige Umdrehungshyperboloid ist eine Umdrehungsregelfläche.

Satz: Dreht sich die eine (AX) von zwei windschiefen Geraden um die andere (OQ) als feste Achse, so daß der Winkel beider Geraden (∢ HAU) und

ihre kürzeste Entfernung (A O) sich nicht ändern, so erzeugt sie die Fläche eines einmanteligen Umdrehungshyperboloids. Die kürzeste Entfernung beschreibt hierbei den kleinsten oder Hauptparallelkreis und die durch Achse und kürzeste Entfernung gelegte Ebene schneidet die Fläche nach derjenigen Hyperbel, durch deren Umdrehung die Fläche ebenfalls erzeugt würde.

397. Algebraischer Beweis dieses Satzes:

Fig. 181.



O Q sei die Achse, A P die Erzeugende, $\sphericalangle APP' = \sphericalangle \alpha$ die Neigung beider und $OA = r$ ihre kürzeste Entfernung. P sei der Schnittpunkt der Erzeugenden mit einem Achsenschnitt und A P' die Projektion von A P auf die von O A beschriebene Hauptparallelkreisebene, dann ist Ebene $(PAP') \perp OA$, daher $P'A \perp OA$, d. h. P' A Tangente an den von A beschriebenen Kreis. Für die Abstände $PQ = x$ und $PP' = y$ des Punkts P von den zu einander senkrechten Achsen O Q und O P' des Achsenschnitts (P O Q) ergiebt sich hiernach aus

$$x^2 = r^2 + P'A^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{y}{P'A} = k$$

wobei $k = \operatorname{ctg} \alpha$ ein konstanter Proportionalitätsfaktor, durch Elimination von P' A die Beziehung

$$x^2 = r^2 + \frac{y^2}{k^2}$$

oder

$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{k^2 r^2} = 1$$

d. h. die Abstände aller Punkte P, in welchen die Erzeugende bei ihrer Drehung den Achsenschnitt (P Q O) trifft, genügen der Gleichung einer Hyperbel, deren Halbachsen r und $k \cdot r$ sind (vergl. 369), oder

Satz: Der Achsenschnitt des einmanteligen Rotationshyperboloids ist eine Hyperbel. Die kürzeste Entfernung und der Winkel der Erzeugenden und der Drehachse geben die große Halbachse und die Neigung der Asymptoten gegen die kleine Achse der Hyperbel.

398. Statt der Erzeugenden A X (vergl. Fig. 180), beschreibt ebenso die zu ihr bezüglich des Achsenschnitts (A O Q) symmetrische A Y die Fläche des Hyperboloids. Sämtliche Lagen einer und derselben Erzeugenden sind windschief, die Fläche ist daher nicht abwickelbar; dagegen folgt, da jede Erzeugende die Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung von einem unendlich fernen Ende bis zum anderen in zwei Hälften teilt, daß jede Lage der einen Erzeugenden von sämtlichen Lagen der anderen getroffen wird. Daher

Satz: Auf der durch Drehung einer Hyperbel erzeugten Fläche des einmanteligen Umdrehungshyperboloids lassen sich zwei Scharen von unendlich vielen Geraden ziehen, die sämtlich gegen die Parallelkreisebenen gleich geneigt sind. Die derselben Schar angehörigen Geraden schneiden sich nicht; jede Gerade der einen Schar dagegen wird von allen Geraden der anderen Schar geschnitten.

Berührungsebene.

399. Da somit durch jeden Punkt des Hyperboloids zwei Gerade der Fläche gezogen werden können, gemäß früherem aber sämtliche durch den Berührungspunkt einer Ebene mit einer Fläche gelegte Schnittebenen die Berührungsebene nach Tangenten an die mit der Fläche erzeugten Schnittkurven treffen, letztere aber in vorliegendem Fall zu Geraden werden, so folgt

Satz: Die Berührungsebene in einem beliebigen Punkt des einmanteligen Umdrehungshyperboloids ist die Ebene der beiden erzeugenden Geraden, die sich in diesem Punkte treffen. Oder: Die Berührungsebene des einmanteligen Umdrehungshyperboloids berührt (schneidet) diese Fläche nach zwei Geraden, deren Schnittpunkt der Berührungspunkt ist.

Frage: Wie schneiden die Berührungsebenen des Asymptotenkegels das Hyperboloid?

400. Aufgabe: Durch einen beliebigen Punkt P eines durch seine Achse und eine beliebige Erzeugende geg. Umdrehungshyperboloids die beiden erzeugenden Geraden zu ziehen, oder: Im Punkt P dieser Fläche die Berührungsebene zu legen.

Lösung. Die Aufgabe ist auf folgende zurückzuführen: Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, die mit einer geg. Geraden einen geg. Winkel bildet und von ihr eine geg. kürzeste Entfernung hat. Die geg. Gerade ist die Achse, der Winkel und die kürzeste Entfernung der Achse und der geg. Erzeugenden sind die weiteren geg. Stücke.

Die Lösung erfolgt mittels des um die Achse mit der geg. kürzesten Entfernung als Halbmesser beschriebenen Kreiscylinders (innerer Berührungscylinder des Hyperboloids). Lege von P aus an diesen Cylinder die beiden Berührungsebenen, die sich nach einer zur Achse parallelen Geraden schneiden, und trage an diese in P den geg. Winkel an. Nur diejenigen zwei Geraden der vier Lösungen sind brauchbar, welche den von der kürzesten Entfernung der beiden geg. Windschiefen bei der Drehung beschriebenen Hauptparallelkreis treffen.

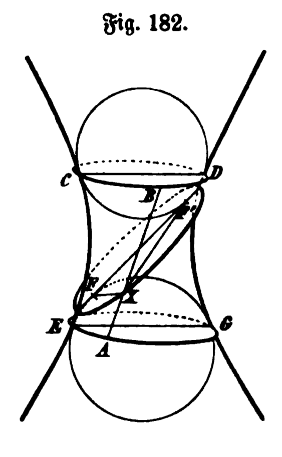
401. Als Sonderfall des in 395) betrachteten Schnitts FOF' folgt, daß die Erzeugenden AX und AY, nach denen das Hyperboloid von der in A zu (FOF') parallelen Tangentialebene geschnitten wird, die Asymptoten der Schnitthyperbel UMV des Asymptotenkegels sind. Nun ist aber die Achsenschnittebene (POP') des Kegels parallel der Ebene der Hyperbel UMV, daher, vergl. auch die Betrachtung 364), $AX \parallel OP$ d. h. die Erzeugenden des Hyperboloids sind parallel denen des Asymptotenkegels, oder

Satz: Hyperboloid, als Regelfläche betrachtet, und Asymptotenkegel haben denselben erzeugenden Winkel.

Beliebige ebene Schnitte des Hyperboloids.

402. Die Kenntnis der beiden Geradenscharen des einmanteligen Umdrehungshyperboloids ermöglicht es, auf dieser Fläche, genau nach demselben Verfahren wie beim Kegel, als einzig mögliche ebene Schnitte die Kegelschnitte nachzuweisen.

Fig. 182.



Ist Σ eine Ebene, die den Asymptotenkegel nach einer Ellipse schneidet, so wähle man wieder den zu Σ senkrechten Achsenschnitt zur Zeichnungsebene. Dann lassen sich zwei Dandelinsche Berührungskugeln einsenken, welche Σ in den Punkten F und F', das Hyperboloid nach den Parallelkreisen CD und EG und somit auch sämtliche Erzeugende in deren Schnittpunkten mit jenen Parallelkreisen berühren. Betrachtet man daher die zu untersuchende Schnittkurve als Schnitt sämtlicher Erzeugenden mit Σ, so folgt z. B. für den Schnittpunkt X dieser Ebene und der Erzeugenden AB

$$XF = XA$$

und $$XF' = XB$$

somit $$XF + XF' = AB = \text{konstans}$$

d. h. die Schnittkurve ist eine Ellipse (vergl. 262).

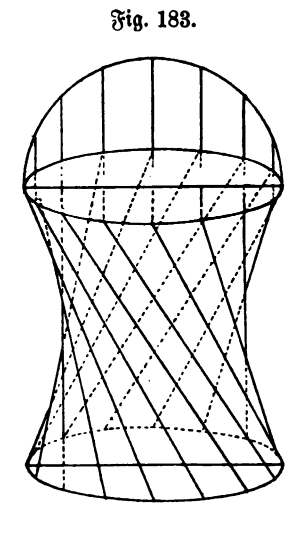
Setzt man diese Betrachtungen fort, schneidet also das Hyperboloid durch eine Ebene parallel einer Berührungsebene des Asymptotenkegels, hierauf durch eine Ebene, die den Asymptotenkegel nach einer Hyperbel oder Doppelgeraden trifft, so folgt

Satz: Die Kegelschnitte sind die einzigen ebenen Kurven, die auf der Fläche des einmanteligen Umdrehungshyperboloids gezeichnet werden können.

Das Hyperboloid als Uebergang zwischen Cylinder und Kegel.

403. Begrenzt man das einmantelige Umdrehungshyperboloid durch zwei zum Hauptparallel- oder Gürtelkreis symmetrische Parallelkreisebenen, so ergiebt sich eine einfache Zeichnung des Hyperboloids als Regelfläche wie folgt:

Fig. 183.

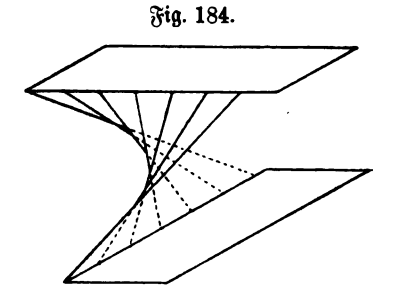


Teile zwei zu einer Achse, als Träger der Mittelpunkte, senkrechte Kreisumfänge vom selben Halbmesser in dieselbe größere Anzahl gleicher Teile, etwa 48 oder 64. Bezeichne diese Teilpunkte in jedem der beiden Kreise von irgend einem beliebigen Punkt aus mit fortlaufender Zahl und verbinde die mit gleicher Zahl bezeichneten Teilpunkte. Werden die Teilpunkte beider Kreise so angeordnet, daß gleichbenannte senkrecht übereinander zu liegen kommen, so sind die Verbindungsgeraden Mantellinien eines Cylinders; stehen die zugeordneten Teilpunkte beider Kreise um 180° voneinander ab, sind also die Gegenpunkte paralleler Kreisdurchmesser, so schneiden sich sämtliche Verbindungsgeraden im Mittelpunkt der Achse und es entsteht ein Doppelkegel.

404. Fertigt man demgemäß mittels zweier, senkrecht auf einer Achse aufsitzender Kreisscheiben eine senkrechte Kreiscylinderfläche, indem man senkrecht übereinander liegende, in gleichen Abständen angebrachte Durchlöcherungen der beiden, in den Scheiben um deren Mittelpunkte mit denselben Halbmessern (etwas kleiner als der Halbmesser der Scheibe) beschriebenen Kreise durch elastische Fäden verbindet, so geht dieser Cylinder durch horizontale Drehung der oberen Scheibe in ein einmanteliges Umdrehungshyperboloid über. Ein zweites, diesem gleiches, mit der anderen Schar der Erzeugenden erhält man durch dieselbe Drehung im entgegengesetzten Sinn. Dreht man um 180°, so entsteht ein Doppelkegel.

Das einmantelige Umdrehungshyperboloid nimmt also eine Zwischenstellung ein zwischen Cylinder und Kegel. Es ist die allgemeinste Umdrehungsfläche, die durch Drehung einer Geraden um eine andere windschiefe erzeugt wird. Kegel und Cylinder entstehen als Sonderfälle des Hyperboloids, sobald Erzeugende und Achse sich schneiden, entweder im Endlichen oder Unendlichen.

Fig. 184.



405. Werden die beiden durchlöcherten Kreise unendlich groß, d. h. zu zwei windschiefen Geraden, auf denen gleiche Stücke abgetragen sind, so erzeugen die Verbindungsgeraden aufeinander folgender Teilpunkte beider Geraden eine Fläche, die als hyperbolisches Paraboloid bezeichnet wird (Fig. 184).

Kugelabbildungen.

406. Die Kugelfläche ist nicht abwickelbar. Man kennt daher kein wirklich in allen Teilen getreues ebenes Bild der Kugelfläche, obwohl die Kenntnis eines solchen insbesondere für die Erdoberfläche oder einzelner Teile derselben Bedürfnis ist.

Um trotz der Unmöglichkeit der Abwickelung ebene Bilder der Kugelfläche zu erhalten, welche die auf dieser Fläche bestehenden geometrischen Beziehungen, wenn auch nur bis zu einem gewissen Grad, getreu wiedergeben, hat man den Ausweg gefunden,

1. die Kugelfläche mittels Perspektive unmittelbar auf die Ebene abzubilden. Die bekanntesten Abbildungen dieser Art sind
   a) die stereographische Abbildung,
   b) die orthographische Abbildung,
   c) die gnomonische Abbildung.
2. die Kugelfläche auf eine abwickelbare Fläche (Cylinder und Kegelfläche) abzubilden, die sich der Kugelfläche möglichst anschmiegt, und die Abwickelung in die Ebene auszuführen. Hierher gehört

d) die Merkatorprojektion,
e) die Kegelprojektion.

Die so erhaltenen Abbildungen sind

α) konform oder winkeltreu, d. h. die ebene Abbildung ist dem abgebildeten Teil der Kugelfläche in den kleinsten Teilen ähnlich (242),

β) äquivalent, d. h. flächengleiche Teile der Kugelfläche sind auch in der Abbildung flächengleich.

γ) für bestimmte Zwecke der Schiffahrt u. s. f. zugerichtet.

Die stereographische Abbildung.

Erfunden von Hipparch 150 vor Chr., bekannt gemacht von Ptolemäus 150 nach Chr.

407. Die Kugelfläche wird von irgend einem ihrer Punkte aus zentralperspektiv auf die diesem Punkt, dem sogen. Projektionsmittelpunkt oder Augpunkt, als Pol zugehörige Großkreisebene abgebildet. Dieses Verfahren ist besonders geeignet, Halbkugeln abzubilden. Aber nur diejenige Halbkugel, welche auf der dem Augpunkt abgewandten Seite der Bildebene liegt, liefert eine endliche und übersichtliche Abbildung, diejenige dagegen, welcher der Augpunkt als Pol angehört, erscheint verzerrt. Der Großkreis K der Bildebene, der sich in sich selbst abbildet, trennt die Bilder beider Halbkugeln. Das Bild der jenseitigen Halbkugel fällt ins Innere, das der diesseitigen außerhalb von K. Sämtliche zu K parallelen Kugelkreise bilden sich ab als konzentrische Kreise zu K. Aber während die dem Pol zu rückenden Parallelkreise der jenseitigen Halbkugel sich auch im Bild entsprechend verengern und der jenseitige Pol selbst sich in den Mittelpunkt von K abbildet, erweitern sich die Kreisbilder der dem Augpunkt sich nähernden Parallelkreise der diesseitigen Halbkugel immer mehr, das Bild des Augpunkts selbst fällt ins Unendliche: Nur die Abbildung der jenseitigen Halbkugel ist brauchbar.

Statt der Großkreisebene K wählt man häufig auch die zu ihr parallele Berührungsebene im Gegenpunkt des Augpunkts zur Bildebene. Dann bildet sich K schon als Kreis von doppeltem Halbmesser ab, so daß auch in diesem Fall nur die Abbildung der dem Augpunkt angehörigen Halbkugel Uebersichtlichkeit bietet.

Bildet man daher einen Teil der Kugelfläche stereographisch ab, so wählt man den Gegenpunkt des Mittelpunkts dieses Flächenteils zum Augpunkt.

Je nachdem der Augpunkt ein Pol, ein Punkt des Aequators oder ein beliebiger Punkt der Erdkugelfläche ist, heißt die Abbildung stereographisch-polar, -äquatoreal, -horizontal, letztere Bezeichnung davon herrührend, daß die Berührungsebene an die Kugel in demjenigen Erdort, der der Mittelpunkt der Abbildung werden soll, den Horizont dieses Erdorts darstellt und entweder selbst Bildebene ist oder der durch den Kugelmittelpunkt gelegten Bildebene parallel geht.

Haupteigenschaften.

408. Die Haupteigenschaften der stereographischen Projektion sind:

1. Alle Kugelkreise, deren Ebenen durch den Augpunkt gehen, bilden sich ab als Gerade.
2. Alle Kugelkreise, deren Ebenen nicht durch den Augpunkt gehen, bilden sich wieder ab als Kreise.
3. Jeder Winkel, unter dem sich zwei Kurven auf der Kugelfläche durchschneiden, bildet sich in wahrer Größe ab, d. h. die Abbildung ist winkeltreu (konform).

409. Beweis der ersten Eigenschaft:

Das Bild des Kreises ist die Schnittgerade der Ebene desselben mit der Bildebene.

410. Beweis der zweiten Eigenschaft:

Verbinde einen beliebigen Punkt P des Kugelkreises PQR... mit dem Gegenpunkt A' des Augpunktes A, sein Bild P' mit dem Kugelmittelpunkt O, so ist

$$\sphericalangle APA' = \sphericalangle AOP' = 90^\circ$$

und daher

$$\triangle APA' \sim \triangle AOP'$$

somit

$$\frac{AP}{AA'} = \frac{AO}{AP'}$$

oder

$$AP \cdot AP' = AO \cdot AA'$$

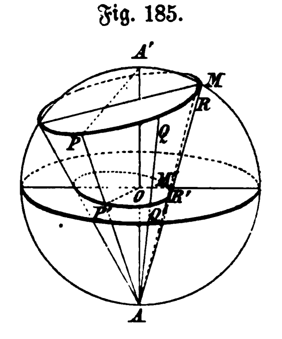
ebenso

$$AQ \cdot AQ' = AO \cdot AA' \quad \text{u. s. f.}$$

daher

$$AP \cdot AP' = AQ \cdot AQ' = \ldots$$
$$= AO \cdot AA' = \text{konstans}$$

Fig. 185.



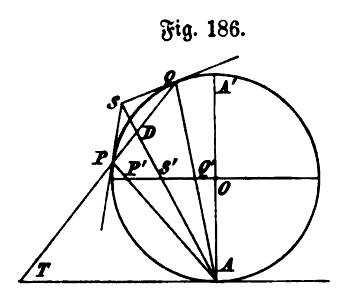
d. h. der Kugelkreis und sein Bild liegen auf einer Kugelfläche (218), das Bild ist somit der Schnitt dieser Kugelfläche mit der Bildebene, d. h. ein Kreis. Dieser Kreis kann als Wechselschnitt des den Kugelkreis projizierenden Kegels betrachtet werden. Jede zu ihm parallele Ebene schneidet den Kegel wieder nach einem Kreis; die zweite Eigenschaft der stereographischen Abbildung bleibt also auch bestehen für den Fall, daß die Berührungsebene im Gegenpunkt Bildebene wird.

411. Die Lage des Mittelpunkts der Kreisprojektion ergiebt sich aus dem

Satz von Chasles: Der Mittelpunkt der stereographischen Projektion eines Kugelkreises ist die stereographische Projektion der Spitze des Kegels, welcher die Kugel nach dem Kugelkreis berührt.*)

*) Michel Chasles, Professor der Mathematik an der Sorbonne in Paris, gestorben 1880.

Fig. 186.



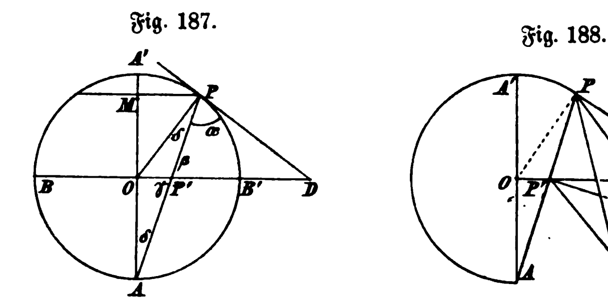
Irgend eine Ebene durch SA schneide den Kegel nach den Mantellinien SP und SQ, den Kugelkreis nach der Sehne PQ, sein Bild nach der Sehne P'Q' und die Kugel nach dem Kugelkreis PQA, der von SP und SQ in P und Q berührt wird. Dann ist S Pol von PQ und A Pol der in A gezogenen Tangente AT || P'Q', daher T Pol zu AS und somit, wenn OQ und P'Q' von SA in D und S' getroffen werden, TPDQ vier harmonische Punkte, desgleichen, von A aus projiziert, ∞ P'S'Q' vier harmonische Punkte, d. h. S'P' = S'Q'. Der feste Schnittpunkt S' des Strahls SA und der Bildebene, die stereographische Projektion der Kegelspitze, ist somit, da diese Betrachtung für alle durch SA gelegten Ebenen gilt, Mittelpunkt sämtlicher Sehnen der Kreisprojektion, d. h. der Mittelpunkt selbst.

412. Beweis der dritten Eigenschaft.

Hilfssatz: Der Projektionsstrahl nach irgend einem Punkt P der Kugelfläche bildet mit der Berührungsebene in diesem Punkt denselben Winkel wie mit der Bildebene.

Die Großkreisebene durch den Projektionsstrahl AP steht nämlich sowohl zur Berührungsebene in P als zur Bildebene senkrecht. Sie schneidet die Be-

Fig. 187. Fig. 188.



rührungsebene nach der Tangente PD an den erzeugten Großkreis, die Bildebene nach OD. Daher sind die fraglichen Neigungswinkel

$$\alpha = 90 - \delta$$
$$\beta = \gamma = 90 - \delta$$

somit

$$\alpha = \beta$$

Die an beide Kurven der Kugelfläche in deren Schnittpunkt P gezeichneten Tangenten PE und PF sind zugleich Tangenten der Kugelfläche und mögen die zu PD und OD senkrechte Schnittgerade DEF der Berührungs- und der Bildebene in den Punkten E und F treffen. Dann bildet sich $\sphericalangle$ EPF, unter dem

sich beide Kurven schneiden, als $\sphericalangle$ EP'F ab und es ist, da $\triangle$ PDP' gleichschenklig,

$$\triangle PDE \cong \triangle P'DE \quad \text{daher} \quad PE = P'E$$
$$\triangle PDF \cong \triangle P'DF \quad \text{daher} \quad PF = P'F$$

somit

$$\triangle EPF \cong \triangle EP'F \quad \text{daher} \sphericalangle EPF = \sphericalangle EP'F$$

Jedes unendlich kleine und daher im Grenzfall ebene Kugeldreieck bildet sich somit, da seine Winkel in wahrer Größe übertragen werden, als ein ihm ähnliches ab. Nun kann jedes größere Stück der Kugelfläche aus unendlich vielen, unendlich kleinen Kugeldreiecken zusammengesetzt gedacht werden; daher folgt, daß auch die Abbildung größerer Teile der Kugelfläche eine konforme ist.

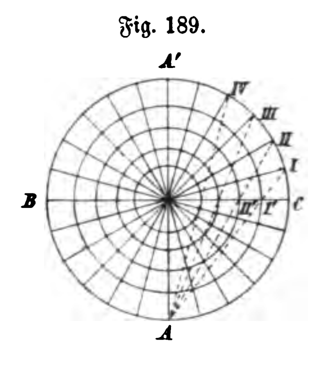
Zeichnung der stereographischen Polarprojektion.

413. Bei der Abbildung der Erdoberfläche handelt es sich vor allem um das von Meridianen und Breitenkreisen gebildete Gradnetz.

Augpunkt ist der Pol und Bildebene die diesem Pol zugehörige Aequatorebene.

Die Meridiane bilden sich ab als Aequatorhalbmesser, deren Winkel gleich den Längengraden sind, die Breitenkreise als konzentrische Kreise zum Aequator.

Fig. 189.



Um z. B. diejenigen Meridiane abzubilden, deren Längenunterschied 15° = 1 Stunde Zeitunterschied beträgt, beschreibe man mit beliebigem Halbmesser OA = r einen Kreis, der den Aequator darstellt. Teile diesen in $\frac{360}{15} = 24$ Teile und ziehe die Radien. Betrachtet man diesen Kreis einen Augenblick als Meridian, so bestimmen die Strahlen vom Augpunkt A nach den Teilpunkten *I, II, III* ... auf der Bildebene BC, die hier als Gerade erscheint, die Halbmesser O*I'*, O*II'*, O*III'* ... der Kreise, als welche sich die Breitenkreise unter 15°, 30°, 45° ... abbilden. Man hat jetzt nur noch die Bildebene um den Durchmesser BC in die Ebene des Papiers zu drehen, d. h. um O mit jenen Halbmessern die konzentrischen Kreise zu beschreiben.

413 a. Der Halbmesser OP' des Bildes eines Breitenkreises unter φ^0 berechnet sich aus $\triangle$ AOP'. Hier ist

$$\sphericalangle OAP' = \frac{1}{2} \sphericalangle POM = \frac{1}{2}(90 - \varphi) = 45 - \frac{\varphi}{2}$$

daher

$$OP' = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) . r$$

Zeichnung der stereographischen Aequatorealprojektion.

414. Der Augpunkt A ist ein Punkt des Aequators; die Bildebene ist der zum Augpunkt als Pol gehörige Meridian. Fig. 190.

Zeichne mit beliebigem Halbmesser $OA = r$ den Begrenzungsmeridian der Bildebene. Der horizontale Durchmesser BC desselben ist das Bild des Aequators, der vertikale NS das Bild des zur Bildebene senkrechten Mittelmeridians. N und S sind die Pole. Teile den Begrenzungsmeridian wieder in 24 gleiche Teile. Die Breitenkreise bilden sich ab als Kreisbögen durch je zwei dieser Teilpunkte, die zu NS symmetrisch liegen, so geht z. B. das Bild des Breitenkreises

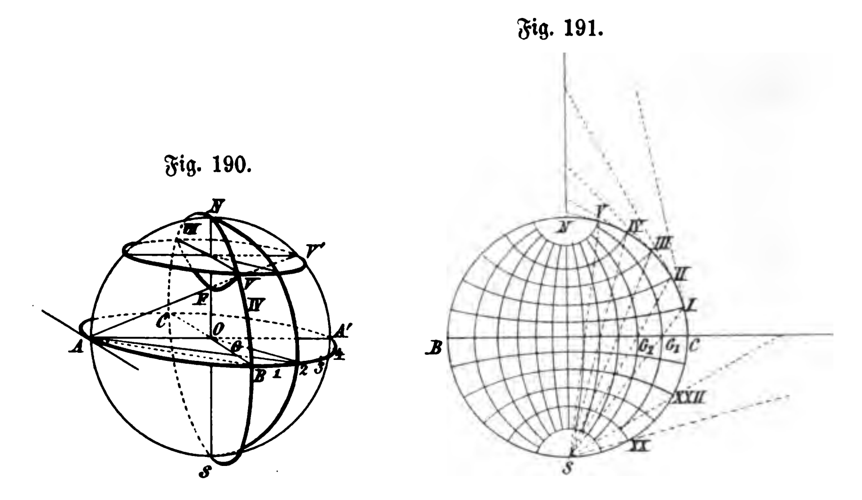


Fig. 190. Fig. 191.

75° durch die Punkte *V* und *VII*. Betrachtet man den anfangs gezeichneten Kreis einen Augenblick als Mittelmeridian, dadurch daß man NBS um NS nach NA'S dreht, so kommt *V* nach *V'* und A *V'* bestimmt auf NS einen dritten Punkt F des Bilds dieses Breitenkreises. Ueberlegt man, daß gemäß der dritten Eigenschaft dieser Kreis auch im Abbild Mittel- und Begrenzungsmeridian senkrecht schneidet, so ergiebt sich folgende einfache Zeichnung der stereographischen Bilder der Breitenkreise:

Ziehe in den Teilpunkten des Begrenzungsmeridians an letzteren die Tangenten bis zum Schnitt mit der Achse NS und beschreibe mit diesen Tangentenabschnitten Kreise. Als Zeichenprobe gehen dieselben durch diejenigen Punkte auf NS, in welche sich von A aus die Teilpunkte des Begrenzungsmeridians abbilden (Fig. 191).

415. Die Meridiane bilden sich ab als Kreise durch die Pole N und S. Denkt man sich den Aequator um BC in die Ebene des Begrenzungsmeridians gedreht, so daß der Augpunkt A mit S und die um 15° abstehenden Teilpunkte 1, 2, 3 ... des Aequators mit den entsprechenden Teilpunkten des Begrenzungsmeridians zusammenfallen, so bestimmen die von S nach *I, II, III* ...

gezogenen Strahlen auf B C diejenigen Punkte, in welche sich die Schnittpunkte der Meridiane und des Aequators abbilden. Das Kreisbild jedes Meridians ist somit durch die Punkte N und S und den jeweiligen dritten Punkt G auf B C eindeutig bestimmt. Berücksichtigt man wieder das Gesetz der Winkeltreue, so folgt, daß die in S an die Abbildungen der Meridiane gezogenen Tangenten mit der im selben Punkt an den Begrenzungsmeridian gezogenen Tangente die Winkel 15°, 30° ... bilden. Wegen der senkrechten Lage von Halbmesser und Tangente schließen somit auch die nach S gezogenen Halbmesser der Abbildungen mit dem Halbmesser S O des Begrenzungsmeridians diese Winkel ein, und da die zu diesen Peripheriewinkeln gehörigen Zentriwinkel durch die abwechselnden Teilpunkte *IV*, *II*, C, *XXII*, *XX* bestimmt sind, so sind die durch B C auf den Strahlen von S nach diesen Teilpunkten abgeschnittenen Strecken ohne weiteres die gesuchten Halbmesser der Abbildungen. Daher folgende einfache Zeichnung der Meridiane:

Beschreibe um die Punkte, in welchen die vom Pol S nach den geraden Teilpunkten des Begrenzungsmeridians gezogenen Strahlen den Aequator B C treffen, Kreise durch die beiden Pole (Fig. 191).

416. Ist $\sphericalangle\, O S II = \lambda$ der Winkel eines abgebildeten Meridians $S G_{10} N$ mit dem Begrenzungsmeridian S B N (falls letzterer der Nullmeridian, ist λ die geographische Länge), so berechnet sich der Halbmesser $S G_2$ dieses Meridianbilds, wenn G_2 der Schnittpunkt von $S II$ mit B C, aus $\Delta\, S O G_2$ zu

$$\varrho = \frac{r}{\cos \lambda}$$

Die orthographische Abbildung.

Fig. 192.

417. Sie ist ein Sonderfall der stereographischen Abbildung. Der Projektionsmittelpunkt liegt im Unendlichen, Bildebene ist die zu den Projektionsstrahlen senkrechte Großkreisebene. Fig. 192.

Die orthographische Polarprojektion ist die senkrechte Horizontalprojektion der Erdkugel auf den Aequator. Die Breitenkreise bilden sich in wahrer Größe ab als konzentrische Kreise, der Mittelpunkt der Abbildung ist das Bild der Pole und die Durchmesser sind die Bilder der Meridiane.

Die orthographische Aequatorealprojektion ist die senkrechte Vertikalprojektion auf irgend einen als Zeichnungsebene gewählten Meridian, der somit in wahrer Größe erscheint. Die Breitenkreise bilden sich ab als horizontale Parallelsehnen von der Größe des jeweiligen Breitenkreisdurchmessers. Der Aequator selbst ist der horizontale Durchmesser. Der vertikale

Durchmesser ist das Bild des zur Zeichnungsebene senkrechten Meridians, des sogen. Mittelmeridians. Da die Meridiane durch schiefe Kreiscylinder abgebildet werden, die zur Zeichnungsebene senkrecht stehen, so sind ihre Bilder Ellipsen, die den vertikalen Durchmesser des Umrisses zur gemeinschaftlichen großen Achse haben. Die Bilder des Umrisses und Mittelmeridians sind Sonderfälle dieser Ellipsen. Diese selbst werden punktweise gezeichnet, indem man aus der Horizontalprojektion von den Schnittpunkten des jeweiligen abzubildenden Meridians (Kreisdurchmesser) mit den Breitenkreisen auf die Vertikalprojektionen letzterer die Lote fällt.

Diese Art der Abbildung ist nicht winkeltreu. Begründung?

Die Zentral- oder gnomonische Abbildung.

418. Die Kugelfläche wird von ihrem Mittelpunkt aus auf eine Berührungsebene abgebildet. Daraus folgt die wichtigste Eigenschaft dieser Abbildung:

Alle Großkreise bilden sich als Gerade. Dieselben sind die Schnittgeraden der erweiterten Großkreisebenen mit der Bildebene.

Jedem sphärischen Dreieck entspricht somit ein ebenes der Abbildung.

Diejenigen Kleinkreise, die zur Bildebene parallel liegen, bilden sich wieder ab als Kreise, alle anderen dagegen, da sie durch schiefe Kreiskegel projiziert werden, als Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln.

419. Je nach der Lage der Bildebene unterscheidet man auch hier wieder Polar-, Aequatoreal- und Horizontalprojektion. Aber die Abbildung einer Halbkugel auf eine einzige Bildebene, nach Art der stereographischen Projektion, ist hier unmöglich, die Längen- und Breitengrade wachsen um so mehr, je weiter man sich vom Berührungspunkt der Bildebene, dem Mittelpunkt der Abbildung, entfernt: Bei der Aequatorealprojektion fällt der Pol, bei der Polarprojektion der Aequator ins Unendliche. Ohne große Verzerrung läßt sich daher nur die nächste Umgebung des Berührungspunkts darstellen. Um die ganze Erdoberfläche abzubilden, nimmt man die Ebenen eines ihr umschriebenen Würfels, der sie in den Polen und am Aequator berührt, zu Bildebenen; um noch größere Genauigkeit zu erhalten, bildet man auf die Seitenflächen eines umschriebenen regelmäßigen Vielflächners von möglichst großer Seitenzahl ab.

Vergl. die Umkehrung dieses Verfahrens für den Beweis des Eulerschen Satzes.

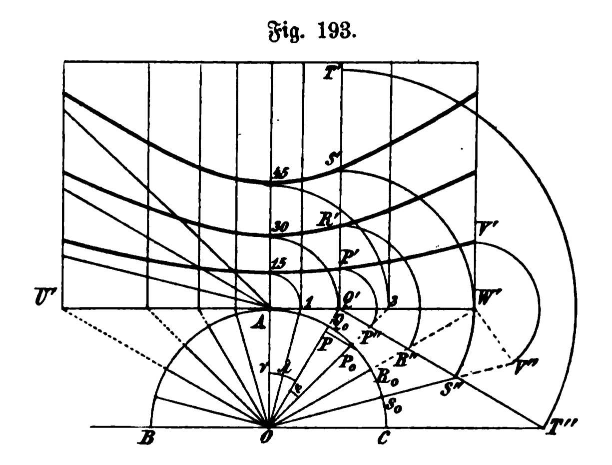
Die gnomonische Aequatorealabbildung.

420. Die Meridiane bilden sich ab als Parallelen, senkrecht zu der den Aequator darstellenden Geraden $U'W'$. Bestimmt man auf jeder derselben die Bildpunkte der Schnittpunkte des zugehörigen Meridians mit den einzelnen Breitenkreisen, indem man zuerst diese Bildpunkte in der Umklappung dieses Meridians und seines Bildes in die Aequatorebene zeichnet, so entsteht durch stetige Ver-

bindung der demselben Breitenkreis zugehörigen Bildpunkte die diesen Breitenkreis darstellende Hyperbel. Warum bilden sich die Breitenkreise als Hyperbeln ab?

Figur 193 in Horizontal- und Vertikalprojektion. Man denke sich die Abbildung der Kugel durch Drehung um U'W' senkrecht zur Ebene des Papiers

Fig. 193.



gestellt. Die Ebene des Meridians OQ_0 schneidet erweitert die Bildebene nach $Q'T \perp U'W'$ und erscheint, um OQ' in die Aequatorebene umgeklappt, als $OQ'T''$. Der Aequator ABC und der Mittelmeridian OA bilden sich ab als die Hauptachsen der Hyperbeln. Die Winkel, unter denen die Asymptoten gegen $U'W'$ geneigt sind, sind die geographischen Breiten 15°, 30°, 45° ... der den bezüglichen Hyperbeln zugehörigen Breitenkreise, bezw. die Komplemente der erzeugenden Winkel der diese Breitenkreise projizierenden Kegel. Warum?

421. Ist r der Kugelhalbmesser und OA der Nullmeridian, so hat irgend ein Ort P von der geographischen Länge λ und der Breite φ in der Abbildung

die Länge $AQ' = \operatorname{tg}\lambda \,.\, r$
die Breite $Q'P = Q'P'' = \operatorname{tg}\varphi \,.\, OQ' = \operatorname{tg}\varphi \,.\, \sec\lambda \,.\, r$

Zeichne die Polarprojektion und bestimme Länge und Breite eines dem Erdort (λ, φ) entsprechenden Bildpunkts. (Vergleiche hiermit Fig. 189.)

422. Auch die gnomonische Abbildung ist nicht winkeltreu. So sind z. B. die unter sich verschiedenen Winkel, unter denen ein Großkreis die einzelnen Meridiane schneidet, in der Aequatorealabbildung einander gleich.

423. Gnomonische Karten finden hauptsächlich in der Schiffahrt Verwendung. Der Haupteigenschaft dieser Abbildung zufolge, entspricht der kürzesten Entfernung zweier Erdorte auf der Kugel auch die kürzeste Entfernung auf der gnomonischen Karte. Die Ausgangs- und Endpunkt verbindende Strecke stellt den kürzesten Weg dar, der allerdings schwieriger zu segeln ist, insofern als 1. der Kurs oder die

Steuerrichtung, d. h. der Winkel der Längsrichtung des Schiffs (Schiffsachse, Fahrtrichtung) mit den einzelnen Meridianen sich fortwährend ändert und 2. diese Winkel, wegen der nicht winkeltreuen Abbildung, aus der Karte nicht in wahrer Größe zu entnehmen sind. (422.)

Bequemer ist die Fahrt, bei welcher sich der Kurs nicht ändert, also in einer Linie, die mit sämtlichen Meridianen gleiche Winkel bildet. Diese eigentümliche, spiralartig den Polen der Erdkugel sich zuwindende Linie heißt Loxodrome. Man wird die Fahrt in der Loxodrome, obwohl diese nicht den kürzesten Weg darstellt, derjenigen im Großkreis stets dann vorziehen, sobald der Wegunterschied nicht zu groß wird, d. h. bei kürzeren Reisen. Die alsdann benützten Karten sind Merkatorabbildungen.

Die Merkatorprojektion.

Erfunden von Gerhard Kremer, gen. Merkator, Kosmograph des Herzogs von Jülich, gest. 1594 in Duisburg.

424. Sie gehört zu den sogen. Cylinderabbildungen, insbesondere ist sie eine Abänderung derjenigen Cylinderprojektion, bei welcher das Gradnetz der Erdkugel, vom Mittelpunkt aus, zentralperspektiv auf eine, die Kugel längs des Aequators berührende Cylinderfläche abgebildet wird. Bei letzterer Projektion erscheinen die Meridiane als Mantellinien, die Breitenkreise als Parallelkreise zum Grundkreis des Cylinders, so daß die Abwickelung desselben, d. h. das ebene Bild des Gradnetzes aus zwei Scharen zu einander senkrechter Parallelgeraden besteht. Während jedoch auf der Kugel die Länge eines Breitengrads, d. h. des 360. Teils des Breitenkreisumfangs, gegen die Pole mehr und mehr abnimmt, diejenige der Meridiangrade dagegen gleich bleibt, haben Breitenkreis- und Meridiangrade in der Abbildung die Rollen vertauscht. Die Meridiane stehen hier gleichweit voneinander ab, d. h. die Längen der Breitengrade sind überall gleich und die Meridiangrade wachsen mehr und mehr, so daß die dem Pol zu liegenden sphärischen Rechtecke des Gradnetzes sich als immer größere Rechtecke abbilden. Das Bild des Pols selbst fällt ins Unendliche. Ohne zu große Verzerrung läßt sich also nur ein in nicht zu hohe Breiten hinaufreichendes Stück der Kugelfläche abbilden. Um aber auch hier die Verzerrung so viel als möglich zu mildern, kam Merkator auf den Gedanken, die sphärischen Rechtecke des Gradnetzes ähnlich abzubilden. Nimmt man den Längen- und Breitenunterschied sehr klein, je etwa nur $\frac{1''}{m}$, so können die sphärischen Rechtecke des Gradnetzes als eben betrachtet werden, und da sie sich nach dem Seitherigen schon als Rechtecke abbilden, so fehlt zur Aehnlichkeit nur noch die Proportionalität der Seiten.

425. Ist $2\pi r$ der Umfang des Aequators bezw. eines Meridians, so ist die $\frac{1}{m}''$ große Strecke desselben

$$k = \frac{1}{m} \cdot \frac{2\pi r}{360 \,.\, 60 \,.\, 60}$$

Irgend ein Breitenkreis unter φ^{0} hat den Halbmesser $r \cdot \cos\varphi$, daher ist die $\frac{1}{m}$" große Strecke dieses Breitenkreises

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{2\pi r \cos\varphi}{360 \cdot 60 \cdot 60} = k \cdot \cos\varphi$$

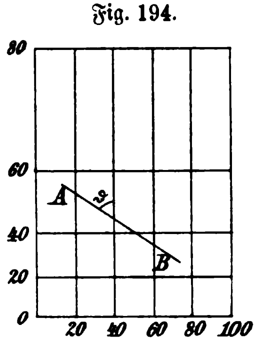


Fig. 194.

Jedes zwischen zwei aufeinander folgenden Breitenkreisen und Meridianen liegende sphärische Rechteck hat somit, da der Abstand ersterer unveränderlich gleich k ist, die Höhe k und die Grundseite $k \cos\varphi$. Das Verhältnis beider $\frac{k}{k\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$ muß also auch für die Seiten der Rechtecke der Abbildung bestehen, und da hier sämtliche Grundseiten gleich, die Höhen aber verschieden sind, so ist dieses Verhältnis so umzuformen, daß die Höhen dem veränderlichen Glied, die Grundseiten dem unveränderlichen Glied desselben proportional werden, also

$$\frac{\text{Höhe}}{\text{Grundseite}} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\frac{1}{\cos\varphi}}{1} = \frac{\sec\varphi}{1}$$

d. h.

Satz: Die Höhen aller Rechtecke des abgebildeten Gradnetzes verhalten sich zu den zugehörigen Grundseiten wie die Sekans der geographischen Breiten dieser Grundseiten zu eins.

Oder: Die auf den Meridianen ihrer Länge nach gemessenen Breitengrade erscheinen in der Merkatorabbildung $\sec\varphi$-mal vergrößert, wobei φ die geographische Breite des dem Aequator zu gelegenen Endpunkts des Breitengrades ist.

Jeder kleine Meridianbogen AB, dessen dem Aequator nächst gelegener Endpunkt die geographische Breite φ hat, bildet sich ab als eine Strecke von der Länge $\sec\varphi$ AB.

Die Loxodrome.

426. Aus der Aehnlichkeit der Abbildung folgt die Winkeltreue derselben. Verbindet man daher zwei Punkte der Abbildung durch eine Gerade, so ist letztere, da sie mit der die Meridiane darstellenden Parallelenschar einen unveränderlichen Winkel $\sphericalangle \vartheta$ einschließt, das Bild derjenigen, die bezüglichen Erdorte verbindenden Kurve, die sämtliche Erdmeridiane unter demselben Winkel $\sphericalangle \vartheta$ schneidet (Loxodrome = Linie des schiefen Laufs). Sie ist also die Steuerrichtung bei unverändertem Kurs und der Vorteil dieser Abbildung beruht eben darauf, daß dieser Kurs ϑ in wahrer Größe aus der Abbildung entnommen werden kann. Fig. 194.

427. Der Wichtigkeit dieser Abbildung wegen, möge noch auf Grund des in 425) entwickelten Hauptsatzes der besondere Beweis erbracht werden, daß die Loxodrome sich als Gerade abbildet.

Irgend eine Loxodrome treffe drei in sehr kleinem, aber gleichem Längenunterschied $\left(\text{etwa } \frac{1}{m}''\right)$ sich folgende Meridiane unter gleichen Winkeln in den Punkten A, B, C von den geographischen Breiten φ, ψ, χ. Der Breitenkreis durch A schneide die beiden anderen Meridiane in D und E, derjenige durch B den dritten Meridian in F. Dann ist $\triangle ADB \sim \triangle BFC$, da beide Dreiecke als eben betrachtet werden dürfen, und daher

$$\frac{BD}{CF} = \frac{AD}{BF}$$

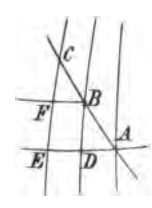
Ist k die Länge des Bogens $\frac{1}{m}''$ auf dem Aequator, so ist in den Breiten φ und ψ

$$AD = \cos\varphi \,.\, k \quad \text{und} \quad BF = \cos\psi \,.\, k$$

somit

$$\frac{BD}{CF} = \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}$$

Fig. 195.



Nun bildet sich BD ab als

$$B_1 D_1 = \sec\varphi \,.\, BD$$

und CF als

$$C_1 F_1 = \sec\psi \,.\, CF$$

somit

$$\frac{B_1 D_1}{C_1 F_1} = \frac{\sec\varphi}{\sec\psi} \cdot \frac{BD}{CF}$$

$$= \frac{\sec\varphi}{\sec\psi} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = 1$$

oder

$B_1 D_1 = C_1 F_1$ und da AD und BF sich abbilden als

$A_1 D_1 = B_1 F_1$ so folgt wegen des rechten Winkels, daß

$\triangle A_1 D_1 B_1 \cong \triangle B_1 F_1 C_1$ somit $\sphericalangle B_1 A_1 D_1 = \sphericalangle C_1 B_1 F_1$

d. h. $A_1 B_1 C_1$ eine Gerade.

427 a. Vergleiche mit der Merkatorprojektion die äquivalente Cylinderabbildung in 478).

Die Kegelprojektion.

428. Man umschreibt der Kugel einen senkrechten Kreiskegel, der sie längs des mittleren Breitenkreises des abzubildenden Flächenstreifens berührt, und bildet das Gradnetz zentralperspektiv vom Kugelmittelpunkt aus darauf ab. Den Meridianen entsprechen alsdann die Mantellinien, den Breitenkreisen die Parallelkreise zum Grundkreis des Kegels. In der Abwickelung des Kegelmantels, einem Kreissektor vom Zentriwinkel

$$\vartheta = \sin\varphi \,.\, 360^{\circ}$$

wobei φ, der erzeugende Winkel des Kegels, die geographische Breite jenes mittleren Breitenkreises ist, stellen die unter gleichen Winkeln sich schneidenden Halb-

messer die Meridiane, die sie senkrecht schneidenden konzentrischen Kreise die Breitenkreise dar. Um eine Uebereinstimmung mit dem Gradnetz der Erdkugel herzustellen, werden die konzentrischen Kreise, die ungleiche Abstände voneinander einhalten, in solche von gleichen Abständen umgeändert (äquidistante Kegelprojektion).

VII. Abschnitt.

Körperberechnungen.

Größte und kleinste Werte einer veränderlichen Größe. (Maxima und Minima.)

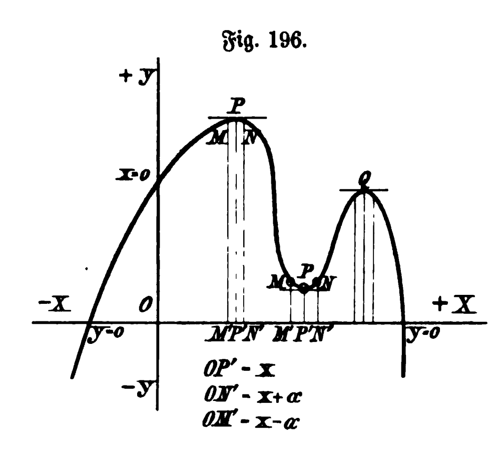
429. Die Lösung der Frage nach dem größten oder kleinsten Wert des Inhalts bezw. der Oberfläche der im folgenden behandelten Körper läßt sich vielfach auf elementarem Weg erledigen durch folgende Betrachtung:

Jeder, von einer veränderlichen Größe x abhängige algebraische Ausdruck heißt eine „Funktion von x", geschrieben $f(x)$. Mit jeder Aenderung von x geht auch eine solche von $f(x)$ vor sich, in welchem Sinn, ob z. B. mit wachsendem x der Wert der Funktion $f(x)$, welcher der Kürze wegen mit y bezeichnet werden soll, ebenfalls wächst oder abnimmt, zeigt sich am übersichtlichsten in einer sogen. „graphischen Darstellung", d. h. einer Zeichnung der Funktion $f(x)$. Man betrachtet jeden Wert von x und den ihm zugehörigen $y = f(x)$ als Abstände eines Punkts $(x\,y)$ von zwei zu einander senkrechten Geraden, den sogen. Achsen. Wird eine größere Anzahl solcher Punkte $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ . . . eingezeichnet, wobei zu berücksichtigen ist, daß positive und negative x bezw. y vom Schnittpunkt der Achsen, dem sogen. Ursprung oder Nullpunkt, aus auf entgegengesetzten Seiten der X- bezw. Y-Achse abzutragen sind, so erhält man durch stetige Verbindung dieser Punkte eine stetig gekrümmte Linie, die Funktionskurve $y = f(x)$, welche die Abhängigkeit zwischen x und $f(x)$ graphisch zur Anschauung bringt. Insbesondere zeigt sie,

1. für welche Werte von x die Funktion $f(x)$ verschwindet: Die den Schnittpunkten der Kurve mit der X-Achse zugehörigen Werte von x sind die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$,
2. für welche Werte von x die Funktion $f(x)$ einen größten bezw. kleinsten Wert annimmt: Diejenigen Punkte, in denen Tangenten parallel der X-Achse gezogen werden können, sind der X-Achse am nächsten bezw. von ihr am entferntesten und haben daher die kleinsten bezw. größten Werte von $f(x)$.

430. Dem Wert x entspricht ein größter Wert f(x) dann, wenn sowohl für zunehmendes als abnehmendes x der Wert der Funktion abnimmt, und ein kleinster Wert der Funktion, wenn sowohl für zu- als abnehmendes x der Wert der Funktion wächst.

Fig. 196.



Läßt man daher irgend ein x, für welches f(x) ein Grenzwert (Extrem) werden soll, um eine endliche Größe α zu- bezw. abnehmen, die sehr klein zu wählen ist, um in dem Nachbargebiet des zu x gehörigen Punktes P der Kurve zu bleiben und nicht in dasjenige eines Punktes Q zu gelangen, dem vielleicht ebenfalls ein Grenzwert der Funktion angehört, mit anderen Worten, schreitet man auf der Kurve vom Punkt P zu den beiden Nachbarpunkten M und N rück- bezw. vorwärts, so ist

f(x) ein Maximum,

wenn geometrisch $PP' > MM'$ und $PP' > NN'$
oder algebraisch $f(x) > f(x - \alpha)$ und $f(x) > f(x + \alpha)$

f(x) ein Minimum,

wenn geometrisch $PP' < MM'$ und $PP' < NN'$
oder algebraisch $f(x) < f(x - \alpha)$ und $f(x) < f(x + \alpha)$.

431. Da α sehr klein ist, so können die in der Entwickelung dieser Ungleichungen mit den Potenzen α^2, α^3 ... behafteten Glieder gegen dasjenige mit α vernachlässigt werden; auch genügt es, statt der zwei Bedingungsungleichungen nur eine zu entwickeln und am Schluß das Vorzeichen von α zu wechseln. Hat z. B. die Funktion die Form

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

so entwickelt man im Fall eines Maximum nur

$$f(x) > f(x + \alpha)$$

oder

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \dots > A + B(x + \alpha) + C(x + \alpha)^2 + D(x + \alpha)^3 + \dots$$

oder

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \dots > A + Bx + B\alpha + Cx^2 + 2C\alpha x + Dx^3 + 3D\alpha x^2 + \dots$$

woraus

$$0 > \alpha (B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots)$$

durch Zeichenwechsel von α folgt für die andere Ungleichung

$$0 > -\alpha (B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots)$$

Man erhält also im allgemeinen

im Fall des Maximum die Bedingungen

$$0 > + \alpha \,.\, \varphi(x)$$

und

$$0 > - \alpha \,.\, \varphi(x)$$

im Fall des Minimum die Bedingungen

$$0 < + \alpha \,.\, \varphi(x)$$

und

$$0 < - \alpha \,.\, \varphi(x)$$

Bedingungen, welche, da α stets eine endliche Größe ist, nur bestehen können, wenn

$$\varphi(x) = 0$$

woraus sich diejenigen Werte von x ergeben, für welche f(x) im Maximum bezw. Minimum wird, welches der beiden Extreme möge im folgenden der einzelne Fall entscheiden. Die Rechnung ist für Maximum wie Minimum dieselbe, mit dem einzigen Unterschied in der Stellung der Haken $>$ und $<$; sie ergiebt also, wenn Maxima und Minima vorhanden sind, beide zugleich.

432. Besitzt die Funktion f(x) Glieder oder Faktoren, die von der Veränderlichen x unabhängig sind, so kann es sich bei Bestimmung eines Grenzwerts nur um den mit x veränderlichen Teil der Funktion handeln. Hat dieselbe die Form

$$f(x) = a + b \,.\, \psi(x)$$

so ergeben die Ungleichungen für $\psi(x)$ diejenigen Werte von x, für welche $\psi(x)$ und somit auch f(x) zum Extrem wird.

Enthält f(x) Wurzelgrößen, so sind die Ungleichungen, nachdem die α enthaltenden Wurzelgrößen auf eine Seite gebracht sind, zu potenzieren, bis α nicht mehr als Wurzelgröße vorkommt und aus der ganzen Ungleichung als Faktor ausgeschieden werden kann.

Enthält die Funktion trigonometrische Funktionen einer veränderlichen Winkelgröße φ, so ist sie in eine solche mit nur einer trigonometrischen Funktion, die alsdann als neue Veränderliche x eingeführt wird, umzugestalten.

433. Beispiel: Zwei gleiche Kugeln K_1 und K_2 vom Halbmesser r rollen auf einer Ebene und berühren dieselbe in den Punkten A und B. Eine dritte gleichgroße Kugel, deren Mittelpunkt O in der Ebene K_1ABK_2 liegt, berührt dieselben fortwährend. In welcher Lage der drei Kugeln ist die Fläche des Fünfecks OK_1ABK_2 die größte?

Die geometrische Betrachtung zeigt: Nähern sich die rollenden Kugeln, so nimmt die Fläche des Fünfecks ab, entfernen sie sich voneinander, so nimmt sie wieder ab. Ein Abnehmen der Fläche nach der einen wie nach der anderen Seite schließt aber notwendig in sich, daß die Fläche in einer gewissen Mittellage einen größten Wert erreicht.

Die Lage des Fünfecks sei bestimmt durch $\sphericalangle K_1 O K_2 = 2\varphi$. Fällt man $OC \perp K_1 K_2$, so ist

$$\text{Fünfeck } AK_1OK_2B = \text{Rechteck } AK_1K_2B + \Delta K_1OK_2$$
$$= r \cdot 4r\sin\varphi + 2r\sin\varphi \cdot 2r\cos\varphi$$
$$= 4r^2(\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)$$

Dieser Wert wird ein Maximum, wenn

$$\sin\varphi + \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \max$$

oder mit

$$\sin\varphi = x \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \sqrt{1-x^2}$$

soll werden

$$x + x\sqrt{1-x^2} = \max;$$

daher die Bedingungen

$$x + x\sqrt{1-x^2} > (x+\alpha) + (x+\alpha)\sqrt{1-(x+\alpha)^2}$$
$$x + x\sqrt{1-x^2} > (x-\alpha) + (x-\alpha)\sqrt{1-(x-\alpha)^2}$$

Entwickelt man die erste Ungleichung, so folgt mit Weglassung höherer Potenzen von α

$$x\sqrt{1-x^2} - \alpha > (x+\alpha)\sqrt{1-x^2-2\alpha x}$$

quadriert

$$x^2(1-x^2) - 2\alpha x\sqrt{1-x^2} > (x^2+2\alpha x)(1-x^2-2\alpha x)$$

oder

$$x^2(1-x^2) - 2\alpha x\sqrt{1-x^2} > x^2(1-x^2) - 2\alpha x^3 + 2\alpha x - 2\alpha x^3$$

woraus

$$0 > +2\alpha\left(\sqrt{1-x^2} - 2x^2 + 1\right)x$$

und

$$0 > -2\alpha\left(\sqrt{1-x^2} - 2x^2 + 1\right)x$$

Daher lautet die Bestimmungsgleichung für x

$$x\left(\sqrt{1-x^2} - 2x^2 + 1\right) = 0$$

woraus

1. $x = 0 = \sin\varphi$, daher $\varphi = 90^\circ$ und $2\varphi = 180^\circ$, d. h. das Fünfeck geht über in das Rechteck AK_1K_2B (Fall des Minimum)

2. $\sqrt{1-x^2} - 2x^2 + 1 = 0$

woraus

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin\varphi$$

daher $\varphi = 60^\circ$ und $2\varphi = 120^\circ$ (Fall des Maximum).

434. Enthält die Funktion, deren Grenzwerte bestimmt werden sollen, mehrere Veränderliche, zwischen denen jedoch eine gewisse Anzahl Bedingungen bestehen möge, so lassen sich ebensoviele Veränderliche der Funktion eliminieren, als Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Enthält die Funktion auch nach der

Elimination noch mehrere Veränderliche, so betrachtet man jede derselben, der Reihe nach, als die einzige Veränderliche und die übrigen als unveränderlich (konstant). Bestimmt man nach dem früheren Verfahren für jede Veränderliche den Wert, für welchen die Funktion ein Maximum wird, so erhält man ebensoviel Gleichungen zwischen den Veränderlichen, als Veränderliche vorhanden sind.

Maßeinheiten.

435. Eine Größe messen heißt angeben, wie oft eine gleichartige Größe, die als Einheit betrachtet wird, in ihr enthalten ist. Je nachdem die zu messende Größe sehr groß oder sehr klein ist, wählt man auch die Einheit entsprechend groß oder klein.

Die hier in Betracht kommenden Einheiten bewegen sich in folgenden Grenzen:

Längeneinheit ist eine Strecke, deren Länge 1 mm oder 1 cm oder 1 dm oder 1 km beträgt, und es ist

$$1\text{ km} = 1000\text{ m},\ 1\text{ m} = 10\text{ dm} = 100\text{ cm},\ 1\text{ dm} = 10\text{ cm},\ 1\text{ cm} = 10\text{ mm}$$

Flächeneinheit ist ein Quadrat, dessen Länge und Breite je gleich der Längeneinheit ist. Als Einheit nimmt man

$$1\text{ qmm} = 1\text{ mm} \,.\, 1\text{ mm} \quad \text{oder} \quad 1\text{ qcm} = 1\text{ cm} \,.\, 1\text{ cm}$$

oder

$$1\text{ qdm} = 1\text{ dm} \,.\, 1\text{ dm} \quad \text{oder} \quad 1\text{ qm} = 1\text{ m} \,.\, 1\text{ m}$$

Raum- oder Volumeinheit ist ein Würfel, dessen Länge, Breite und Höhe je gleich der Längeneinheit ist. Als Raumeinheit nimmt man:

$$1\text{ cmm} = 1\text{ mm} \,.\, 1\text{ mm} \,.\, 1\text{ mm} \quad \text{oder} \quad 1\text{ ccm} = 1\text{ cm} \,.\, 1\text{ cm} \,.\, 1\text{ cm}$$

oder

$$1\text{ l} = 1\text{ cdm} = 1\text{ dm} \,.\, 1\text{ dm} \,.\, 1\text{ dm} \quad \text{oder} \quad 1\text{ cbm} = 1\text{ m} \,.\, 1\text{ m} \,.\, 1\text{ m}$$

Die Verwandlung von Flächeneinheiten bezw. Raumeinheiten in andere geschieht, indem man zuerst die Beziehung zwischen den zugehörigen Längeneinheiten anschreibt und alsdann quadriert bezw. kubiert; z. B. hat man sich die Verwandlung von cbm in l wie folgt zu denken

$$1\text{ m} = 10\text{ dm} = 10 \,.\, 1\text{ dm}$$

$$1\text{ m} \,.\, 1\text{ m} \,.\, 1\text{ m} = 10 \,.\, 1\text{ dm} \,.\, 10 \,.\, 1\text{ dm} \,.\, 10 \,.\, 1\text{ dm} = 1000 \,.\, 1\text{ dm} \,.\, 1\text{ dm} \,.\, 1\text{ dm}$$

$$= 1000 \,.\, 1\text{ cdm} = 1000\text{ cdm} \quad = 1000\text{ l}$$

Zu merken ist:

a) Nur gleichnamige Längeneinheiten können multipliziert und dividiert werden. Das Verfahren hat man sich folgendermaßen zu denken: z. B.

$$7\text{ m} \,.\, 5\text{ cm} = 700 \,.\, 1\text{ cm} \,.\, 5 \,.\, 1\text{ cm} = 700 \,.\, 5 \,.\, 1\text{ cm} \,.\, 1\text{ cm} = 3500 \,.\, 1\text{ qcm}$$

$$= 3500\text{ qcm}$$

$$5\text{ m} \,.\, 40\text{ cm} \,.\, 25\text{ mm} = 5 \,.\, 10 \,.\, 1\text{ dm} \,.\, 40 \,.\, \frac{1}{10} \,.\, 1\text{ dm} \,.\, 25 \,.\, \frac{1}{100} \,.\, 1\text{ dm}$$

$$= 50 \,.\, 4 \,.\, \frac{1}{4} \,.\, 1 \text{ dm} \,.\, 1 \text{ dm} \,.\, 1 \text{ dm} = 50 \,.\, 1 \text{ cdm}$$

$$= 50 \text{ cdm} = 50 \text{ l}$$

$$\frac{15 \text{ m}}{5 \text{ cm}} = \frac{15 \,.\, 100 \,.\, 1 \text{ cm}}{5 \,.\, 1 \text{ cm}} = 300 \quad \text{(unbenannte Zahl)}$$

$$\frac{5 \text{ mm}}{1 \text{ m}} = \frac{5 \,.\, 1 \text{ mm}}{100 \,.\, 1 \text{ mm}} = \frac{1}{200} \quad \text{(unbenannte Zahl)}$$

b) Multipliziert oder dividiert werden kann nur

Länge × Länge = Fläche
Länge × Fläche = Länge × Länge × Länge = Volumen
Volumen : Volumen = unbenannte Zahl
Volumen : Fläche = Länge
Volumen : Länge = Fläche
Fläche : Fläche = unbenannte Zahl
Fläche : Länge = Länge
Länge : Länge = unbenannte Zahl

wobei die Benennungen auf dieselbe Längeneinheit zu beziehen sind, z. B. hat man sich geschrieben zu denken:

$$\frac{5 \text{ qm}}{10 \text{ cm}} = \frac{5 \,.\, 1 \text{ m} \,.\, 1 \text{ m}}{10 \,.\, 1 \text{ cm}} = \frac{5 \,.\, 100 \,.\, 100 \,.\, 1 \text{ cm} \,.\, 1 \text{ cm}}{10 \,.\, 1 \text{ cm}} = 5000 \text{ cm} = 50 \text{ m}$$

$$\frac{5 \text{ cdm}}{10 \text{ m}} = \frac{5 \,.\, 1 \text{ dm} \,.\, 1 \text{ dm} \,.\, 1 \text{ dm}}{10 \,.\, 10 \,.\, 1 \text{ dm}} = \frac{1}{20} \text{ qdm} = \frac{1}{20} \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 1 \text{ cm} \,.\, 1 \text{ cm}$$

$$= 5 \text{ qcm}$$

436. Da durch drei beliebige Richtungen, die als Gerade durch einen Punkt dargestellt sein mögen, jede andere Richtung im Raum bestimmt ist, jede beliebige Ausdehnung eines Körpers also auf diese drei ursprünglichen Ausdehnungen bezogen werden kann, so sagt man:

Ein Körper hat drei (unabhängige) Ausdehnungen, oder: er ist von der dritten Dimension.

Die Rechnungsergebnisse sind stets dahin zu prüfen, ob bei der Frage nach Längen, Flächen oder Rauminhalten der gefundene algebraische Wert linear, d. h. von der ersten, oder ob er von der zweiten bezw. dritten Dimension ist.

Bezüglich der Möglichkeit der geometrischen Zeichnung der Ergebnisse hat die moderne Mathematik bewiesen:

Satz: Mit alleiniger Benützung von Lineal und Zirkel können nur Gerade und Kreise gezeichnet werden und zwar können, was die Längen betrifft, nur solche Strecken und Kreisbögen bestimmt werden, deren Längen sich algebraisch aus Gleichungen ergeben, die durch Quadratwurzeln in endlicher Anzahl zu lösen möglich sind.

Bestimmung des Rauminhalts von Körpern mit beliebiger, nicht gesetzmäßiger Gestalt.

437. Praktisch läßt sich der Rauminhalt jedes beliebigen Körpers bestimmen:

1. Durch vollständiges Untertauchen in ein bis zum Rand mit Wasser oder einer anderen, den Körper nicht lösenden Flüssigkeit gefülltes Gefäß. Die überfließende Flüssigkeitsmenge hat denselben Rauminhalt wie der Körper.
2. Durch Wägen des Körpers an der Luft bezw. im luftleeren Raum (absolutes Gewicht P) und Ermittelung seiner Dichte s.

Dichte oder spezifisches Gewicht eines starren oder flüssigen Körpers ist diejenige unbenannte Zahl, die angiebt, wievielmal dieser Körper schwerer ist, als das gleiche Volumen reinen destillierten Wassers von 4° C. (Wasser von der größten Dichte).

Nimmt man als gleiche Volumina 1 cdm = 1 l, so wiegt demnach 1 cdm des Körpers s-mal soviel als 1 l destillierten Wassers und da das Gewicht des letzteren 1 kg (Gewichtseinheit) beträgt, so kann man auch sagen:

Dichte eines Körpers ist das Gewicht eines cdm in kg oder eines ccm in g.

Hat also der Körper V cdm Rauminhalt, so wiegt er V . s kg, was mit seinem absoluten Gewicht P kg übereinstimmen muß, somit

Satz: Gewicht gleich Rauminhalt mal Dichte,

$$\mathbf{P = V \cdot s}$$

wobei P und V die zugehörigen Benennungen kg und cdm (l), bezw. g und ccm haben.

Hiernach bestimmt sich das Volumen eines Körpers zu

$$V = \frac{P}{s}$$

Das Wasser ist, da seine Dichte gleich 1 ist, der einzige Stoff, bei welchem entsprechende Gewichts- und Raummaße vertauscht werden dürfen.

Tabelle der Dichten verschiedener Stoffe siehe am Schluß.

In manchen der folgenden Aufgaben ist Gebrauch zu machen vom

Satz des Archimedes: Ein Körper ist in einer Flüssigkeit um so viel leichter als die von ihm verdrängte Flüssigkeitsmenge wiegt. Er schwimmt daher, wenn sein Eigengewicht gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist.

Der Quader.

438. Drei Paare paralleler Ebenen, die zu einander senkrecht stehen, erzeugen einen von sechs Rechtecken umschlossenen Körper, den Quader, auch rechtwinkliges Parallelepipedon, rechtwinkliges Parallelflach, rechtwinkliger Spat genannt. Je zwei Gegenrechtecke sind kongruent. Die drei von einer Ecke aus-

laufenden, zu einander senkrechten Kanten heißen Länge, Breite und Höhe des Quaders. Dieselben seien:

1. Kommensurabel, d. h. sie haben ein gemeinschaftliches Maß, das als Längeneinheit auf der einen Seite a-mal, auf der anderen b-mal, auf der dritten c-mal abgetragen werden kann. Legt man durch die Teilpunkte Parallelebenen zu den Begrenzungsebenen, so zerfällt der Quader in $a \cdot b \cdot c$ Einheitswürfel mit der Längeneinheit als Kante.

2. Inkommensurabel, d. h. es giebt keine Längeneinheit, die als gemeinschaftliches Maß der drei Kanten genommen werden konnte. Dann ist es möglich, eine Längeneinheit μ so klein zu bestimmen, daß m, n, p solcher Einheiten kürzer und $m + 1$, $n + 1$, $p + 1$ derselben größer sind als die Kantenlängen a, b, c. Ein aus den Kanten $m \cdot \mu$, $n \cdot \mu$, $p \cdot \mu$ hergestellter Quader ist somit zu klein, der aus den Kanten $(m + 1)\,\mu$, $(n + 1)\,\mu$, $(p + 1)\,\mu$ hergestellte zu groß bezüglich des gegebenen. Läßt man aber μ mehr und mehr abnehmen, was selbstredend ein Anwachsen der Maßzahlen m, n, p zur Folge hat, so werden die Unterschiede zwischen den entsprechenden Kanten $m \cdot \mu$ und $(m + 1)\,\mu$ u. s. f. immer kleiner; die Rauminhalte beider Hilfsquader, die sich gemäß 1) als die Produkte dreier aneinander stoßender Kanten darstellen, da letztere kommensurabel sind, nähern sich mehr und mehr — der kleinere wächst, der größere nimmt ab — und erreichen schließlich als gemeinschaftliche Grenze den gegebenen Quader, dessen Inhalt V sich somit ebenfalls als das Produkt seiner drei aneinander stoßenden Kanten a, b, c darstellt. Daher

$$\text{Volumen } \mathbf{V} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$
$$= G \cdot h \quad \text{(Grundfläche mal Höhe)}$$

wenn die Flächen der von den Grundkanten a und b gebildeten Rechtecke als Grundflächen G und ihr Abstand c als Höhe h des Quaders bezeichnet wird.

Die Gesamtoberfläche eines Quaders, aus drei Paaren kongruenter Rechtecke bestehend, ist

$$O = 2\,(bc + ca + ab)$$

Die Diagonale d, welche irgend zwei Gegenecken verbindet, steht mit den Kanten in der Beziehung

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$
$$= (DC^2 + DB^2) + AB^2$$

oder

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Fig. 197.

Satz: Die vier Diagonalen eines Quaders sind gleich und halbieren sich im selben Punkt, dem Schwerpunkt des Quaders.

Der Würfel.

439. Werden die Kanten $a = b = c$, so geht der Quader über in einen Würfel, dessen

$$\text{Rauminhalt } V = a^3$$
$$\text{Oberfläche } O = 6a^2$$
$$\text{Diagonale } d = \sqrt{3} \,.\, a$$

aus $d^2 = 3a^2$.

Beispiele.

440. 1. Beispiel: Aus einem rechteckigen Stück Pappdeckel mit den Seiten a cm und $2a$ cm soll eine Schachtel ohne Deckel mit möglichst großem Inhalt angefertigt werden.

Die Seite des Quadrats, das an den Ecken abfällt, betrage x cm, dann ist das Volumen des Quaders

$$V = x(a - 2x)(2a - 2x) = 2x(a - 2x)(a - x)$$

somit

$$x(a - 2x)(a - x) = \max$$

daher, nach Auflösung der Klammern, die Bedingungen

$$a^2x - 3ax^2 + 2x^3 > a^2(x + \alpha) - 3a(x + \alpha)^2 + 2(x + \alpha)^3$$

und

$$> a^2(x - \alpha) - 3a(x - \alpha)^2 + 2(x - \alpha)^3$$

Die erste Ungleichung giebt entwickelt

$$a^2x - 3ax^2 + 2x^3 > a^2x + a^2\alpha - 3ax^2 - 6a\alpha x + 2x^3 + 6\alpha x^2$$

oder

$$0 > + \alpha(a^2 - 6ax + 6x^2)$$

und

$$0 > - \alpha(a^2 - 6ax + 6x^2)$$

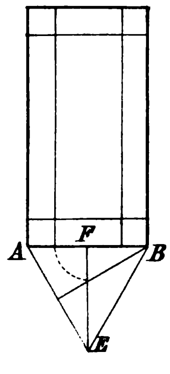
daher

$$6x^2 - 6ax + a^2 = 0$$

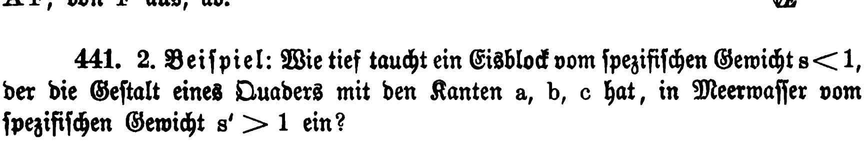
woraus

$$x = \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a$$
$$= 0{,}5\,a - 0{,}288\,a = 0{,}212\,a \text{ cm}$$

Fig. 198.



Geometrisch: Zeichne über $AB = a$ das gleichseitige Dreieck AEB und schneide $\frac{1}{3}$ der Höhe EF desselben auf AF, von F aus, ab.



441. 2. Beispiel: Wie tief taucht ein Eisblock vom spezifischen Gewicht $s < 1$, der die Gestalt eines Quaders mit den Kanten a, b, c hat, in Meerwasser vom spezifischen Gewicht $s' > 1$ ein?

Die zur Oberfläche des Wassers senkrechte Kante a dm tauche x dm tief ein, so ist das

Volumen des Blocks = abc cdm; sein Gewicht = $abc \cdot s$ kg
Volumen des verdrängten Wassers = bcx cdm; sein Gewicht = $bcx \cdot s'$ kg

somit nach dem Archimedischen Gesetz:

$$bcs' \cdot x = abc \cdot s$$

woraus

$$x = \frac{s}{s'} \cdot a \text{ dm} = \frac{10\,s}{s'} \cdot a \text{ cm}$$

442. 3. Beispiel: Wie verhalten sich die Rauminhalte ähnlicher Quader?

Aehnliche Quader haben proportionale Kanten und Diagonalen, somit

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

und daher

$$\frac{\text{Quader I}}{\text{Quader II}} = \frac{abc}{a'b'c'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{a}{a'} \cdot \frac{a}{a'}$$
$$= \frac{a^3}{a'^3} = \frac{b^3}{b'^3} = \frac{c^3}{c'^3} = \frac{d^3}{d'^3}$$

d. h. die Rauminhalte ähnlicher Quader verhalten sich wie die Kuben ihrer Diagonalen oder ihrer entsprechenden Kanten.

443. 4. Beispiel: Einen Würfel von der Kante a in einen Quader zu verwandeln, dessen Seiten sich wie m : n : p verhalten.

Die Kanten des Quaders seien x, y, z und haben dieselbe Benennung wie a, so ist

$$x \cdot y \cdot z = a^3 \quad \dots\dots\dots\dots \quad 1)$$
$$x : y : z = m : n : p \quad \dots\dots\dots\dots \quad 2)$$

somit, wenn λ der Proportionalitätsfaktor, statt 2) die Gleichungen:

$$x = \lambda \cdot m \qquad y = \lambda \cdot n \qquad x = \lambda \cdot p$$

Diese Werte in 1) eingesetzt, folgt

$$\lambda m \cdot \lambda n \cdot \lambda p = a^3 \qquad \text{woraus } \lambda = \frac{a}{\sqrt[3]{m \cdot n \cdot p}}$$

und somit

$$x = \frac{m}{\sqrt[3]{mnp}} \cdot a \quad y = \frac{n}{\sqrt[3]{mnp}} \cdot a \quad z = \frac{p}{\sqrt[3]{mnp}} \cdot a$$

444. 5. Beispiel: Aus der Diagonale d eines Würfels seine Kante, seine Oberfläche und seinen Rauminhalt zu berechnen.

Ist x die Kante des Würfels, so folgt

$$\sqrt{3} \cdot x = d$$

woraus

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} . d$$

und daher

$$6x^2 = O = 6 . \frac{3}{9} d^2 \qquad = 2d^2$$

und

$$x^3 = V = \frac{d^2}{3} . \frac{\sqrt{3}}{3} d = \frac{\sqrt{3}}{9} d^3$$

445. 6. Beispiel: Die Delische Aufgabe.

Sie handelt davon, geometrisch die Kante eines Würfels zu zeichnen, dessen Rauminhalt das Doppelte, allgemein das m-fache eines gegebenen Würfels ist, und hat ihren Namen davon, daß zwischen Plato und den Deliern ein Meinungsaustausch hierüber entstanden sein soll. Sie ist die eine der drei berühmten klassischen Aufgaben der Mathematiker des Altertums: die Multiplikation des Würfels, die Dreiteilung des Winkels und die Quadratur des Kreises.

Ist a die Kante des gegebenen Würfels, x diejenige des gesuchten, so soll sein

$$x^3 = m . a^3$$

Setzt man, da es sich um das Zeichnen von Strecken handelt, m gleich dem Verhältnis zweier Strecken, von denen die eine der Einfachheit halber gleich a genommen wird, also $m = \frac{b}{a}$, im Fall der Verdoppelung $m = \frac{2a}{a} = 2$, so folgt

$$x^3 = a^3 b \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a} = \frac{ab}{x}$$

Bezeichnet man diese dritte bezw. vierte Proportionale mit y und schreibt

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

oder

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

oder

$$x^2 = ay \quad \text{und} \quad y^2 = bx$$

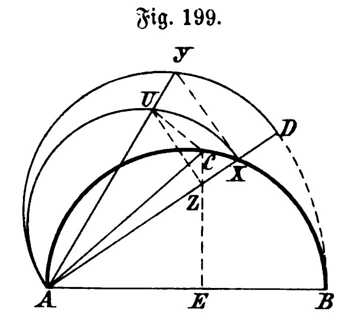
so zeigt sich die Aufgabe zurückgeführt auf die Zeichnung zweier mittleren Proportionalen x und y zu zwei bekannten Strecken a und b. Die moderne Mathematik hat bewiesen, daß eine geometrische Lösung mit bloßer Zuhilfenahme von Lineal und Zirkel unmöglich ist, weil der die gesuchte Strecke $\sqrt[3]{m} . a$ bestimmende Koeffizient $\sqrt[3]{m}$ algebraisch nicht als rationale Funktion einer endlichen Anzahl von Quadratwurzelzahlen dargestellt werden kann. Das eben machte die scheinbar so einfache Aufgabe der Würfelverdoppelung schon bei den griechischen Mathematikern des Altertums berühmt, daß Zirkel und Lineal zu ihrer Bewältigung nicht auszureichen schienen und alle bekannten Lösungen höhere Hilfsmittel benützten, insbesondere ebene Kurven, die sich von Geraden und Kreisen

unterschieden, z. B. die Kegelschnitte. Dem Charakter der Aufgabe als einer „körperlichen" entsprechend, strebte man vor allem nach stereometrischen Lösungen, und so wurde die Aufgabe der Würfelverdoppelung geradezu die Veranlassung, daß Menächmus die räumliche Darstellung der von planimetrischen Betrachtungen her bereits bekannten Kegelschnitte auffand und so der Entdecker der „Kegelschnitte" im eigentlichen Sinn des Wortes wurde.

1. Lösung des Archytas mittels Kreiscylinder und Kreiskegel. Archytas von Tarent, 430—365 v. Chr., Staatsmann und Feldherr, befreundet mit Platon.

Beschreibe über AB = b, der größeren der beiden Strecken, den Halbkreis, lege die kleinere Strecke AC = a als Sehne in denselben und fälle CE ⊥ AB. Betrachtet man den Halbkreis als Horizontalspur eines zur Ebene des Papiers senkrechten Cylinders und AC als Erzeugende des durch Drehung des rechtwinkligen Dreiecks AEC um die Kathete AE entstehenden Kegels, stellt man sodann den Halbkreis durch Drehung um AB vertikal und dreht ihn um die in seiner Ebene liegende, ihn berührende Cylindermantellinie A, so giebt es eine ganz bestimmte Stellung AD dieses Vertikalkreises, bei welcher die Mantellinie des Umdrehungskegels durch den Endpunkt der vom Vertikalkreis aus dem Cylindermantel ausgeschnittenen Mantellinie X geht. Klappt man den Vertikalkreis um AD in die Ebene des Papiers, so stellt die zu AD senkrechte Halbsehne XY die ausgeschnittene Cylindermantellinie dar; zieht man ZU ⊥ AD bis zum Schnitt mit AY, so ist AU = AC die Erzeugende des Kegels und ∢ AUX = 90°, da der Grundkreis des Kegels zugleich ein Kleinkreis der durch Drehung des Halbkreises ACB um AB als Durchmesser erzeugten Kugel ist und U somit als ein Punkt des Schnittkreises AUX der Vertikalkreisebene AD mit jener Kugelfläche betrachtet werden kann, daher

Fig. 199.



$$\frac{AU}{AX} = \frac{AX}{AY} = \frac{AY}{AD} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

woraus

$$x^3 = a^2 b \quad \text{und} \quad y^3 = a b^2$$

für b = 2a

$$x^3 = 2a^3 \quad \text{und} \quad y^3 = 4a^3$$

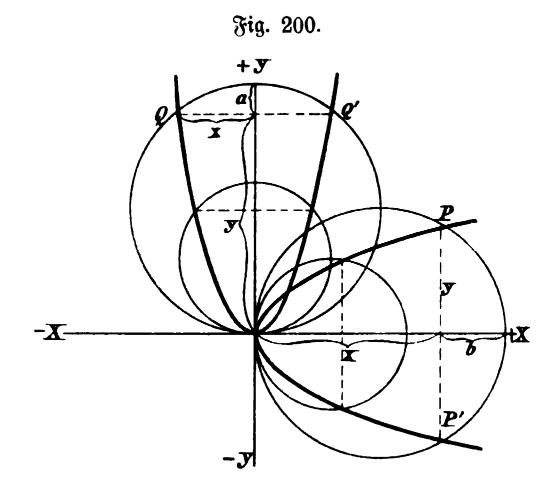
d. h. AX ist die Kante eines Würfels, der den doppelten, und AY diejenige eines solchen, der den vierfachen Rauminhalt eines gegebenen Würfels von der Kante a hat.

2. Lösung des Menächmus mittels Kegelschnitten.

Menächmus zwischen 400 und 300 v. Chr., Schüler des Eudoxus von Knidos. Letzterer, 408—355 v. Chr., ist Schüler des Archytas und des Platon, bekannt als Geometer, Astronom, Arzt und Staatsmann.

Beschreibe um die Punkte einer Geraden als X=Achse Kreise, die sämtlich durch einen festen Punkt O dieser Geraden gehen und dieselbe je in einem zweiten Punkt treffen. Trage von letzterem aus die Strecke b gegen O hin ab und errichte im Endpunkt nach beiden Seiten das Lot auf der Achse, das den betreffen-

Fig. 200.



den Kreis in zwei Punkten P und P' trifft. Betrachtet man die Entfernung des Lots von O als x, das Lot selbst als $\pm y$, so gilt für jeden derart bestimmten Punkt P die Beziehung

$$y^2 = bx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Sämtliche aufeinanderfolgende Punkte P stetig verbunden bilden eine Parabel, die O zum Scheitel hat (vgl. 338). Führt man dieselbe Zeichnung für die Punkte der in O auf der X=Achse senkrechten Scheiteltangente als Y=Achse durch, nur daß nunmehr vom jeweiligen zweiten Schnittpunkt der Kreise und der Achse die Strecke a gegen O hin abzutragen ist, so erhält man die Punkte Q und Q' einer zweiten Parabel, welche die X=Achse zur Scheiteltangente hat. Die Achsenabstände y und $\pm x$ der Punkte dieser Parabel genügen der Bedingung

$$x^2 = ay \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Die Achsenabstände x und y der Schnittpunkte beider Parabeln sind daher diejenigen Strecken, welche beiden Bedingungen 1) und 2) zugleich genügen, und sind somit die gesuchten mittleren Proportionalen.

Die Beziehungen 1) und 2), die zwischen den beiden Achsenabständen x und y aller Punkte der bezüglichen Parabeln gelten, heißen die „Gleichungen der Parabeln".

3. Lösung durch höhere Kurven.

Schneide auf der einen von zwei senkrechten Geraden, der Z=Achse, die Strecke $OA = a$ ab; wähle auf der anderen, der X=Achse, die Strecke $OU = x$ beliebig, dann bestimmt $UV \perp AU$ auf der Z=Achse die Strecke $OV = y$ so, daß

$$x^2 = ay \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

und $VW \perp UV$ bestimmt auf der X-Achse die Strecke $OW = z$, so daß

$$y^2 = xz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Ziehe im Abstand OW die Parallele zur X-Achse bis zum Schnitt mit der Parallelen durch U zur Z-Achse in einem Punkte P, so entsteht durch stetige Verbindung aller nach diesem Verfahren für die verschiedensten Werte von x bestimmten Punkte P eine mit zwei Aesten ins Unendliche sich erstreckende Kurve, welche **Wendepunktsparabel** heißt, da sie sich im Punkt O, die Z-Achse als „Wendetangente" berührend, nach der anderen Seite derselben wendet, indem sie dabei von konvex in konkav übergeht. Die, nach Elimination von y aus der fortlaufenden Proportion

Fig. 201.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

wie 1) und 2) sich auch darstellen, zwischen x und z erhaltene Beziehung

$$x^3 = a^2 z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

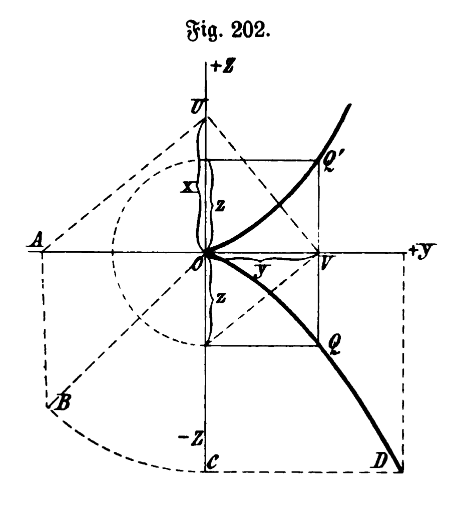
heißt die „Gleichung der Wendeparabel", denn die Achsenabstände eines jeden Punkts der Kurve genügen dieser Bedingung. Da der dem Abstand $z = m \, . \, a$ irgend eines Punkts dieser Kurve zugehörige andere Abstand x, als Würfelkante genommen, einen Würfel liefert, dessen Rauminhalt

$$x^3 = a^2 \, . \, ma = m \, . \, a^3$$

ist, so folgt:

Fig. 201: Die Wendeparabel $x^3 = a^2 z$ hat die Eigenschaft, daß die Abstände ihrer Punkte von der Wendetangente die Kanten aller Würfel darstellen, deren Rauminhalt ein beliebig Vielfaches desjenigen eines Würfels von der Kante a beträgt.

Fig. 202.



Eliminiert man x statt y aus 3), so folgt

$$y^3 = az^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Sämtliche Punkte Q, deren Achsenabstände y und z dieser Bedingung genügen, bilden eine stete Linie, die **Neilsche Parabel** heißt (Fig. 202). Sie hat im Nullpunkt einen Rückkehrpunkt, erstreckt sich, da die rechte Seite von 5) stets positiv ist, y also nie negativ werden kann, in der Richtung der + Y-Achse ins

Unendliche und ist zu dieser symmetrisch, denn zu jedem Wert von y gehören zwei gleichgroße, aber entgegengesetzt gerichtete Werte von z. Sie dient wie die Wendeparabel zur Ermittelung der gesuchten Würfelkanten, denn für $z = \sqrt{m} \,.\, a$ folgt

$$y^3 = a \,.\, ma^2 = ma^3$$

z. B. für $z = OC = OB = \sqrt{2} \,.\, a$ ist das zugehörige $y = CD$ die Kante des Würfels vom doppelten Rauminhalt $2\,a^3$.

Wendeparabel und Neilsche Parabel lösen die Delische Aufgabe allgemein, Archytas und Menächmus nur den besonderen Fall.

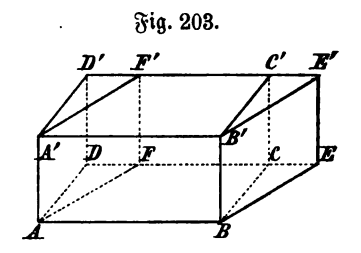
Andere Lösungen siehe Eutokius' Kommentar zu Archimedes (Ausgabe Heilberg).

Prisma und Cylinder.

Gerades oder senkrechtes Parallelflach.

446. Zwei beliebige Paare Parallelebenen begrenzen mit einem dritten Paar, das zu den parallelen Schnittgeraden ersterer senkrecht steht und daher die Grundflächen darstellen möge, ein senkrechtes oder gerades Parallelflach (Parallelepipedon). („Gerade" im Gegensatz zu schief, wenn die Seitenkanten zu den Grundflächen nicht mehr senkrecht stehen.) Verwandelt man die Grundfläche, Parallelogramm ABCD, in das flächengleiche Rechteck ABEF von gleicher Grundseite und gleicher Höhe und errichtet über diesem den Quader, dessen Seitenkanten denen des Parallelflachs gleich sind, so folgt aus der Gleichheit entsprechender Kanten und Winkel

Fig. 203.



$$\text{Prisma } ADFA'D'F' \cong \text{Prisma } BCEB'C'E'$$

und, wenn ersteres vom Parallelflach abgeschnitten, letzteres ihm hinzugefügt wird, daß das Parallelflach raumgleich ist dem Quader. Da der Inhalt des letzteren nur von den Grundflächen und deren Abstand, der durch die Seitenkanten dargestellten Höhe, abhängt und beide Körper diese Größen entsprechend gleich haben, so folgt, daß das Volumen des geraden Parallelflachs

$$V = G \,.\, h = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}.$$

Dreiseitiges gerades Prisma.

447. Jede Diagonalebene teilt das gerade Parallelflach in zwei kongruente dreiseitige gerade Prismen. Der Rauminhalt eines solchen ist daher die Hälfte desjenigen des Parallelflachs. Ist somit G die Fläche eines Grunddreiecks des

Prismas und h die Seitenkante oder Höhe, so folgt, daß das Volumen des dreiseitigen geraden Prismas

$$V = \frac{1}{2} \cdot (2\,G \cdot 2\,h) = G \cdot h$$
$$= \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}.$$

Gerades n-seitiges Prisma.

448. Legt man durch je zwei aufeinanderfolgende Parallelen einer aus n Parallelen bestehenden Schar eine Ebene und schließt den in der Richtung der Parallelen noch offenen Raum durch zwei parallele Grundebenen, so entsteht das n-seitige Prisma, das „gerade oder senkrechte", wenn die parallelen Seitenkanten zu den Grundebenen senkrecht, das „schiefe", wenn sie gegen dieselben geneigt sind. Die Umgrenzung wird gebildet von n Rechtecken bezw. Parallelogrammen als Seitenflächen und zwei kongruenten n-Ecken als Grundflächen. Sind die Grundflächen regelmäßige Vielecke, so heißen auch die Prismen regelmäßig.

Durch Diagonalebenen, welche durch eine Seitenkante gelegt sind, wird das gerade n-seitige Prisma in (n — 2) gerade dreiseitige Prismen zerlegt, welche jene Seitenkante h zur Höhe und die (n — 2) Teildreiecke G_1, G_2, $G_3 \ldots G_{n-2}$ der Grundfläche G zur Grundfläche haben. Daher ist das Volumen des geraden n-seitigen Prismas

$$V = G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + \ldots + G_{n-2} \cdot h = (G_2 + G_2 + \ldots + G_{n-2})\,h$$
$$= G \cdot h = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}.$$

Cylinder.

449. Ist die Grundfläche des geraden Prismas ein Vieleck mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten, so wird das Prisma zum senkrechten Cylinder, dessen Volumen somit ebenfalls ist:

$$V = G \cdot h = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}.$$

450. Hieraus folgt allgemein: Gerade Prismen bezw. Cylinder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind raumgleich.

Gerader Kreiscylinder.

451. Grundfläche ein Kreis vom Halbmesser r, daher, wenn h die Höhe, Volumen des senkrechten Kreiscylinders

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Die Mantelfläche M des geraden Kreiscylinders wickelt sich ab als ein Rechteck, dessen eine Seite die Mantellinie oder Höhe h, dessen andere Seite der Umfang $2\pi r$ des Grundkreises ist (vergl. 250), somit

$$M = 2\pi r \cdot h$$

und daher die Gesamtoberfläche

$$O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

451a. Ueber den Mantel des schiefen Kreiscylinders siehe 251a:

Die Mantelfläche des schiefen Kreiscylinders ist das Produkt aus Mantellinie und Umfang des Querschnitts.

Ueber den Rauminhalt siehe 457.

Beispiele.

452. 1. Beispiel: Ein cylindrischer Baumstamm schwimmt mit horizontaler Achse im Wasser, das $\frac{5}{6}$ seiner Mantelfläche benetzt. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Holzes?

Denkt man sich den cylindrischen Baumstamm, der den Halbmesser r und die Länge h haben möge, von der erweiterten Oberfläche des Wassers durchschnitten, so wird eine Wassermenge vom Volumen desjenigen Cylinderstücks verdrängt, das den größeren zur Sehne r gehörigen Abschnitt des Querschnitts zur Grundfläche hat. Dieser Kreisabschnitt setzt sich zusammen aus einem Sektor, der $\frac{5}{6}$ des ganzen Grundkreises ausschneidet, und einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite r. Daher ist nach dem Archimedischen Gesetz über das Schwimmen der Körper, wenn s die gesuchte Dichte bezeichnet:

$$\pi r^2 h \,.\, s = \left(\frac{5}{6}\pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} r^2\right) h$$

woraus

$$s = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}833\ldots + 0{,}135$$
$$= 0{,}968 \quad \text{(Buche)}$$

453. 2. Beispiel: Wie groß ist das Gewicht eines Mühlsteins aus Sandstein vom spezifischen Gewicht s, wenn die zur Aufnahme der Welle bestimmte lichte Weite 2r cm, der Durchmesser des Umfangs 2R cm und die Dicke h cm beträgt?

Das Volumen des Mühlsteins stellt sich dar als die Differenz zweier Cylinder mit den Halbmessern R und r und der gemeinschaftlichen Höhe h, daher

$$V = \pi R^2 \,.\, h - \pi r^2 \,.\, h \qquad \text{ccm}$$

somit

$$\text{Gewicht} \quad P = V \,.\, s = \pi s (R^2 - r^2) h \qquad \text{g}$$

oder

$$= \frac{\pi s}{1000}(R^2 - r^2) h \qquad \text{kg}$$

für die Berechnung zu schreiben

$$= \frac{\pi s}{1000}(R + r)(R - r) h \quad \text{kg}$$

454. 3. Beispiel: Aus einem cylindrischen Baumstamm den Balken von größter Tragfähigkeit zu sägen.

Der Balken hat die Gestalt eines Quaders von der Länge des Stamms. Es handelt sich daher nur um die Bestimmung des Querschnitts, eines dem Grundkreis des Stammes vom Halbmesser R einbeschriebenen Rechtecks. Nun ist die Tragfähigkeit oder Biegungsfestigkeit T direkt proportional der Breite x und dem Quadrat der Dicke y des Querschnitts, also

$$T = k \, . \, xy^2$$

wobei k ein von der Natur des Stoffs abhängiger Koeffizient ist. Somit

$$xy^2 = \max \quad \text{mit der Bedingung} \quad x^2 + y^2 = 4r^2$$

daher

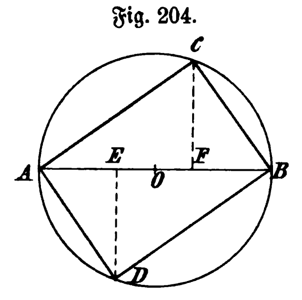
$$x(4r^2 - x^2) = \max$$

und somit

$$4r^2x - x^3 > 4r^2(x \pm \alpha) - (x \pm \alpha)^3$$

wenn die beiden Bedingungsungleichungen vereinigt geschrieben werden. Die Entwickelung der ersten giebt

Fig. 204.



$$4r^2x - x^3 > 4r^2x + 4r^2\alpha - x^3 - 3x^2\alpha$$

oder

$$0 > \pm \alpha (4r^2 - 3x^2)$$

somit

$$4r^2 - 3x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{4}{3} r^2$$

oder

$$2r : x = x : \frac{2r}{3}$$

Teile den Durchmesser in drei gleiche Teile, errichte in den Teilpunkten nach entgegengesetzten Seiten Lote bis zum Schnitt mit dem Kreisumfang und verbinde diese Schnittpunkte mit den Endpunkten des Durchmessers.

455. 4. Beispiel: Wie wären die Größenverhältnisse cylindrischer Münzen zu wählen, damit dieselben möglichst wenig abgenützt würden?

Mit anderen Worten: Gesucht Halbmesser x und Höhe y eines Cylinders vom Gewicht p Gramm, dessen Oberfläche ein Minimum ist, also

$$2\pi xy + 2\pi x^2 = \min$$

wobei, wenn s das spezifische Gewicht der Münze

$$\pi x^2 y \, . \, s = p$$

Setzt man $\frac{p}{\pi s} = k$, so folgt

$$2\pi \left(\frac{xk}{x^2} + x^2\right) = \min$$

oder

$$\frac{k}{x} + x^2 = \min$$

und daher
$$\frac{k}{x} + x^2 < \frac{k}{x \pm \alpha} + (x \pm \alpha)^2$$
somit
$$k\,(x + \alpha) + x^3\,(x + \alpha) < kx + x\,(x + \alpha)^3$$
$$kx + k\alpha + x^4 + \alpha x^3 < kx + x^4 + 3\alpha x^3$$
und daher
$$0 < \pm\,\alpha\,(2x^3 - k)$$
somit
$$2x^3 - k = 0$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{k}{2}} = \sqrt[3]{\frac{p}{2\pi s}} \quad \text{cm}$$
$$y = 2\sqrt[3]{\frac{k}{2}} = 2\sqrt[3]{\frac{p}{2\pi s}} \quad \text{cm}$$
somit
$$2x = y$$
d. h. die Münze hat die Gestalt eines quadratischen Cylinders.

456. Satz des Cavalieri*): Zwei Körper sind raumgleich, wenn sie zu einer Ebene in eine solche Lage gebracht werden können, daß sie von jeder beliebigen Parallelebene nach gleichen Durchschnittsflächen geschnitten werden.

Beweis: Da gemäß Voraussetzung die Deckflächen beider auf einer gemeinsamen Grundebene ruhenden Körper in einer zu dieser Grundebene parallelen Ebene liegen müssen, so haben beide Körper dieselbe Höhe h. Teilt man diese in n gleiche Teile, legt durch die Teilpunkte Parallelschnitte zur Grundebene und errichtet über diesen Schnittflächen gerade Prismen bezw. Cylinder von der Höhe $\frac{h}{n}$, so sind je zwei entsprechende Prismen oder Cylinder beider Körper raumgleich, da sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. Läßt man die Anzahl der Teile unendlich groß werden, so werden die Prismen- bezw. Cylinderhöhen selbst unendlich klein und jede der Prismen- bezw. Cylindersummen geht schließlich in den ihr zugehörigen Körper als Grenze über. Daher sind auch die gegebenen Körper selbst raumgleich.

457. Folgerungen aus dem Satz des Cavalieri:

1. Das Volumen eines schiefen Prismas ist gleich demjenigen eines senkrechten von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, denn alle Parallelschnitte zur Grundfläche sind kongruent. Hieraus folgt allgemein für das Volumen jedes beliebigen Prismas
$$V = G\,.\,h$$
2. Beliebige Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind raumgleich.

---

*) Franzesco Cavalieri, Professor der Mathematik zu Bologna, gestorben 1647.

3. Die Rauminhalte beliebiger Prismen verhalten sich wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe

$$\frac{V}{V'} = \frac{G \,.\, h}{G' \,.\, h'}$$

ist $h = h'$, so folgt

$$\frac{V}{V'} = \frac{G}{G'}$$

ist $G = G'$, so folgt

$$\frac{V}{V'} = \frac{h}{h'}$$

d. h. Prismen mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen, solche mit gleicher Grundfläche wie ihre Höhen.

4. Sind die Prismen ähnlich, d. h. sämtliche entsprechenden Winkel gleich und entsprechende Kanten proportional, dann ist, wenn a und a', u und u' zwei entsprechende Grund- bezw. Seitenkanten sind:

$$\frac{a}{a'} = \frac{u}{u'} = \frac{h}{h'}$$

und

$$\frac{G}{G'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{h^2}{h'^2}$$

daher

$$\frac{V}{V'} = \frac{G \,.\, h}{G' \,.\, h'} = \frac{G}{G'} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{h^2}{h'^2} \cdot \frac{h}{h'}$$

$$= \frac{h^3}{h'^3} = \frac{a^3}{a'^3} = \ldots$$

d. h. die Volumina ähnlicher Prismen verhalten sich wie die Kuben entsprechender Kanten oder Höhen, allgemein wie die Kuben entsprechender Strecken.

5. Dieselben Sätze gelten für die Cylinder.

6. Schrumpfen die Deckflächen zu Punkten zusammen, so gehen die Prismen in Pyramiden über. Gemäß 43 a) verhalten sich die Flächen paralleler Schnitte einer Pyramide wie die Quadrate entsprechender abgeschnittener Seitenkanten und somit auch wie die Quadrate der Höhen der abgeschnittenen Pyramiden. Legt man daher im Abstand x von der gemeinsamen Grundebene zweier Pyramiden eine zu dieser parallele Ebene, welche die Pyramiden nach den Vielecken $F \backsim G$ und $F' \backsim G'$ schneidet, so ist

$$\frac{F}{G} = \frac{(h - x)^2}{h^2} \quad \text{und} \quad \frac{F'}{G'} = \frac{(h' - x)^2}{h'^2}$$

ist somit $G = G'$ und $h = h'$, womit auch $h - x = h' - x$, so folgt

$$F = F'$$

daher nach Cavalieri:

Satz: Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind raumgleich.

7. Dieselben Sätze über Schnittflächen und Rauminhalte gelten für beliebige Kegel.

Pyramide und Kegel.

Dreiseitige Pyramide (Tetraeder).

458. Schneidet man von einem beliebigen dreiseitigen Prisma mittels einer durch drei beliebige Ecken gelegten Ebene (A'BC) die dreiseitige Pyramide A' — ABC ab und spaltet die übrig bleibende vierseitige Pyramide A' — BB'C'C durch Ebene (C'A'B) in zwei weitere dreiseitige Pyramiden, so ist nach dem Satz über die Raumgleichheit von Pyramiden (457 . 6):

Fig. 205.

Pyram. C' — A'B'B oder Pyram. A' — BB'C'
= Pyram. A' — BCC'
und Pyram. C' — A'AB
= Pyram. C — A'AB oder Pyram. A' — ABC
aber Pyram. C' — A'B'B = Pyram. C' — A'AB

d. h. das Prisma besteht aus drei raumgleichen Pyramiden; somit ist insbesondere

$$\text{Pyramide } A' - ABC = \frac{1}{3}\text{ Prisma } ABCA'B'C'$$
$$= \frac{1}{3} G \, . \, h$$

daher

Satz: Das Volumen der dreiseitigen Pyramide ist ein Drittel desjenigen eines Prismas von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

n-seitige Pyramide.

459. Zerlegt man dieselbe mittels Diagonalebenen durch eine Seitenkante in (n — 2) dreiseitige Pyramiden, deren einzelne Grundflächen G_1, $G_2 \ldots G_{n-2}$ sein mögen, so ergiebt sich das Volumen V der ganzen Pyramide zu

$$V = \frac{1}{3} G_1 \, . \, h + \frac{1}{3} G_2 \, . \, h + \ldots + \frac{1}{3} G_{n-2} \, . \, h$$
$$= \frac{1}{3} (G_1 + G_2 + \ldots + G_{n-2})\, h$$

oder $$\mathbf{V = \frac{1}{3} G \, . \, h}$$

daher

Satz: Das Volumen jeder beliebigen Pyramide ist gleich dem dritten Teil eines über der Grundfläche errichteten Prismas von derselben Höhe, also „ein Drittel Grundfläche mal Höhe“.

460. Hieraus folgen dieselben Sätze über die Verhältnisse der Inhalte von Pyramiden wie diejenigen für das Prisma.

460a. Die Oberfläche der Pyramiden setzt sich zusammen aus den Flächen der n Seitendreiecke und des Grundvielecks. Ein allgemeiner Ausdruck hierfür läßt sich bei der Verschiedenartigkeit der Pyramiden nicht aufstellen. Jeder Fall ist für sich zu behandeln.

Senkrechter Kreiskegel.

461. Wird das Grundvieleck der Pyramide zum Kreis von Halbmesser r, so geht die Pyramide in den Kegel über, dessen Rauminhalt daher ist:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 . h$$

462. Die Sätze über die Verhältnisse von Rauminhalten bei Kegeln sind dieselben wie diejenigen für die Pyramide. Es verhalten sich also die Inhalte V und V' zweier beliebiger Kreiskegel

mit derselben Grundfläche $V : V' = h : h'$

mit derselben Höhe $V : V' = \pi r^2 : \pi r'^2 = r^2 : r'^2$

Pyramidenstumpf.

463. Eine zur Grundfläche G im Abstand h parallele Schnittfläche G' teilt die Pyramide in einen Pyramidenstumpf und dessen Ergänzungspyramide. Der Pyramidenstumpf läßt sich daher aus $G \backsim G'$ und Höhe h als Unterschied der ganzen Pyramide und der Ergänzungspyramide, deren bezügliche Höhen x und y sein mögen, wie folgt berechnen: Volumen V des Pyramidenstumpfs

$$V = \frac{1}{3} G . x - \frac{1}{3} G . y \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

wobei x und y in den gegebenen Stücken bestimmt sind durch die beiden Bedingungen

$$x - y = h \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{G}{G'} \quad \text{(vergl. 457. 6)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

aus 3) folgt

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G'}}$$

und somit

$$\frac{x}{x-y} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} \quad \text{woraus} \quad x = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} . h$$

$$\frac{y}{x-y} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} \quad \text{„} \quad y = \frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} . h$$

Diese Werte in 1) eingesetzt, folgt

$$V = \frac{1}{3} . \frac{G\sqrt{G} - G'\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} . h$$

Setzt man

$$\sqrt{G} = u, \quad \sqrt{G'} = v \quad \text{also} \quad G = u^2, \; G' = v^2$$

so ist

$$\frac{G\sqrt{G} - G'\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} = \frac{u^3 - v^3}{u - v} = u^2 + uv + v^2 = G + \sqrt{GG'} + G'$$

daher

$$V = \frac{1}{3} G h + \frac{1}{3} \sqrt{GG'} . h + \frac{1}{3} G' . h$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{G} + \sqrt{\mathbf{GG'}} + \mathbf{G'}}{3} . \mathbf{h}$$

d. h. der Pyramidenstumpf ist raumgleich drei ebenso hohen Pyramiden, zwei derselben über den Grundflächen des Stumpfs selbst, die dritte über dem geometrischen Mittel derselben errichtet.

Senkrechter Kreiskegelstumpf.

464. Sind G und G' Kreise mit den Halbmessern r und r', so geht der Pyramidenstumpf über in einen Kegelstumpf, dessen Volumen somit beträgt

$$V = \frac{\pi r^2 + \pi r r' + \pi r'^2}{3} . h$$

oder

$$\mathbf{V} = \frac{\pi}{3} (\mathbf{r}^2 + \mathbf{r r'} + \mathbf{r'}^2) \mathbf{h}$$

465. Die Ableitung dieses Ausdrucks nach demselben Verfahren wie beim Pyramidenstumpf ergiebt

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 . x - \frac{1}{3} \pi r'^2 . y$$

und zur Bestimmung von x und y die beiden Bedingungen

$$x - y = h$$

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{r'}$$

woraus

$$x = \frac{r}{r - r'} . h \quad \text{und} \quad y = \frac{r'}{r - r'} . h$$

und daher

$$V = \frac{\pi h}{3} . \frac{r^3 - r'^3}{r - r'}$$

$$= \frac{\pi}{3} (r^2 + r r' + r'^2) h$$

Zerlege den Ausdruck in seine Posten, wie lautet dann das Ergebnis in Worten?

Mantel des senkrechten Kreiskegels und Kreiskegelstumpfs.

466. Der Mantel des senkrechten Kreiskegels, in der Abwickelung ein Kreisausschnitt, dessen Bogen, beschrieben mit der Kegelmantellinie s als Halbmesser,

die Länge $2\pi r$ des Umfangs des Grundkreises des Kegels hat, ist nach früherem (315)

$$M = \pi r s = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

467. Die Beziehung zwischen dem erzeugenden Winkel φ des Kegels und dem Winkel ω der Abwickelung seines Mantels lautet gemäß früher (314)

$$\omega = \frac{r}{s} \cdot 360^\circ = \sin \varphi \cdot 360^\circ$$

468. Der Mantel des senkrechten Kreiskegelstumpfs, ein Kreisausschnittring, dessen Breite gleich der Mantellinie s des Kegelstumpfs ist, ergab sich gemäß früher (317) zu

$$M = \pi s (r + r') = \pi (r + r') \sqrt{(r - r')^2 + h^2}$$

Durch Einführung der Mittellinie des Achsenschnitts $\frac{r + r'}{2} = \varrho$ folgte

$$M = 2 \pi \varrho \cdot s$$

und drittens mit Benützung des Mittellots p zur Mantellinie

$$M = 2 \pi p \cdot h$$

469. Der Winkel ϑ des Kreisausschnitts, in welchem die abgerollte Mantelfläche des Kegelstumpfs liegt, ergiebt sich aus

$$\frac{\vartheta}{360} = \frac{2\pi r}{2\pi x} = \frac{2\pi r'}{2\pi y}$$

$$\frac{\vartheta}{360} = \frac{2\pi (r - r')}{2\pi (x - y)} = \frac{r - r'}{s}$$

$$\vartheta = \frac{r - r'}{s} \cdot 360^\circ = \sin \varphi \cdot 360^\circ$$

wobei x und y die Mantellinien des ganzen und des Ergänzungskegel bezeichnen, φ erzeugender Winkel des Kegels ist.

Sämtliche Ausdrücke gelten nur für die Mantelflächen senkrechter, nicht für diejenigen schiefer Kreiskegel und -stumpfe. Die Berechnung letzterer ist eine schwierigere. (Vergl. die Abwickelung schiefer Kreiskegel 312.)

Beispiele.

470. 1. Beispiel: Eine Pyramide durch Parallelebenen zur Grundfläche in n gleiche Teile zu teilen.

Jede dieser $n - 1$ Parallelebenen schneidet, nach der Spitze zu, eine der geg. Pyramide ähnliche Pyramide ab. Die Inhalte letzterer betragen $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ... $\frac{n-1}{n}$ desjenigen der geg. Pyramide. Dann folgt, wenn s_1, $s_2 \ldots s_{n-1}$ die auf einer Seitenkante s der geg. Pyramide durch die Parallel-

ebenen erzeugten Seitenkanten der Teilpyramiden sind, nach dem Satz über das Verhältnis der Rauminhalte ähnlicher Pyramiden:

$$\frac{s_1^{\,3}}{s^3} = \frac{1}{n} \qquad \frac{s_2^{\,3}}{s^3} = \frac{2}{n} \quad \ldots \quad \frac{s_{n-1}^3}{s^3} = \frac{n-1}{n}$$

woraus

$$s_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{n}} \,.\, s \qquad s_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{n}} \,.\, s \qquad s_{n-1} = \sqrt[3]{\frac{n-1}{n}} \,.\, s$$

Diese Strecken, von der Spitze aus auf s abgetragen, geben die Teilpunkte, durch welche die Parallelebenen zu führen sind.

471. 2. Beispiel. Eine regelmäßige dreiseitige und eine regelmäßige vierseitige Pyramide, in welchen die Seitenkanten den Grundkanten gleich sind, haben gleiche Oberflächen. Wie verhalten sich ihre Inhalte?

Die Kante der dreiseitigen Pyramide sei x, diejenige der vierseitigen y, so ist

$$G_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \,.\, x^2, \; G_4 = y^2, \; h_3 = \frac{\sqrt{6}}{2} \,.\, x, \; h_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \,.\, y$$

somit

$$4 \,.\, \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = y^2 + 4 \,.\, \frac{\sqrt{3}}{4} y^2$$

oder

$$\sqrt{3} \,.\, x^2 = (1 + \sqrt{3})\, y^2$$

woraus

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

Die Volumina beider Pyramiden werden

$$V_3 = \frac{1}{3} \,.\, \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \,.\, \frac{\sqrt{6}}{3} x = \frac{\sqrt{2}}{12} x^3$$

$$V_4 = \frac{1}{3} y^2 \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} y \qquad = \frac{\sqrt{2}}{6} \,.\, y^3$$

somit

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{x^3}{2y^3} = \frac{(3 + \sqrt{3})\sqrt{3 + \sqrt{3}}}{2 \,.\, 3 \,.\, \sqrt{3}} = \frac{1}{\dfrac{6\sqrt{3}}{(3 + \sqrt{3})\sqrt{3 + \sqrt{3}}}}$$

nun ist:

$$\frac{6\sqrt{3}}{(3 + \sqrt{3})\sqrt{3 + \sqrt{3}}} = \frac{6\sqrt{3} \,.\, \sqrt{3 + \sqrt{3}}}{(3 + \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3} \,.\, \sqrt{3 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3\,(3 + \sqrt{3})\,(2 - \sqrt{3})^2}}{(2 + \sqrt{3})\,(2 - \sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{3\,(9 - 5\sqrt{3})}$$

daher

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{1}{\sqrt{27 - 15\sqrt{3}}} = 1 : 1{,}0096, \text{ etwa } 1000 : 1010.$$

472. 3. Beispiel. Einer Kugel vom Halbmesser ϱ ist eine abgestumpfte gerade Pyramide umschrieben, deren Grundfläche ein Quadrat mit der Diagonale 4ϱ ist. Berechne Inhalt und Oberfläche dieses Pyramidenstumpfs.

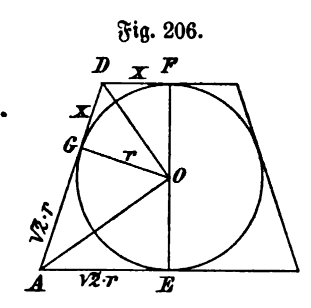


Fig. 206.

Die Kugel berührt Grund- und Deckfläche in den Diagonalschnittpunkten. Die Höhe ist daher ein Kugeldurchmesser. Eine durch ihn gelegte Ebene parallel einer Grundkante schneidet Kugel und Pyramidenstumpf nach einem Großkreis mit umschriebenem gleichschenkligen Trapez. Die parallelen Seiten sind gleich den Kanten der Grund- und Deckfläche, die Schenkel gleich den Höhen der vier kongruenten seitlichen Trapeze. Aus der halben Diagonale 2ϱ des Grundflächenquadrats berechnet sich die halbe Seite desselben $AE = \sqrt{2} \,.\, \varrho$. Die halbe Seite $DF = DG = x$ des Quadrats der Deckfläche ergiebt sich, da

$$\sphericalangle AOD = \frac{1}{2} \sphericalangle FOG + \frac{1}{2} \sphericalangle EOG = 90^\circ$$

aus

$$OG^2 = DG \,.\, AG \qquad \text{oder} \qquad \varrho^2 = \sqrt{2} \,.\, \varrho \,.\, x$$

zu

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\varrho$$

und

$$AD = \sqrt{EF^2 + (AE - DF)^2} = \sqrt{4\varrho^2 + \left(\sqrt{2}\,.\,\varrho - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\varrho\right)^2}$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \,.\, \varrho$$

somit

$$V = \frac{2\varrho}{3}\left(4 \,.\, 2\varrho^2 + \sqrt{8\varrho^2 \,.\, 2\varrho^2} + 4 \,.\, \frac{2}{4}\,\varrho^2\right)$$
$$= \frac{28}{3}\,\varrho^3$$
$$O = 8\varrho^2 + 2\varrho^2 + 4\,\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\varrho \,.\, \frac{3\sqrt{2}}{2} \,.\, \varrho$$
$$= 28\,\varrho^2$$

473. Da allgemein der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel eines beliebigen Vielflächners von n Seitenflächen G_1, G_2, ... G_n als Spitze von n Pyramiden betrachtet werden kann, welche diese Seitenflächen zu Grundflächen und die zu den Berührungspunkten gezogenen Halbmesser ϱ der Kugel zu Höhen haben, so folgt, daß das Volumen des Vielflächners

$$V = \frac{1}{3} G_1 . \varrho + \frac{1}{3} G_2 . \varrho + \ldots + \frac{1}{3} G_n . \varrho$$

$$= \frac{1}{3} (G_1 + G_2 + \ldots + G_n) . \varrho$$

oder $$V = \frac{1}{3} O . \varrho$$

somit

Satz: Der Rauminhalt eines beliebigen, einer Kugel umschriebenen Vielflächners ist gleich demjenigen einer Pyramide, welche die Oberfläche des Vielflächners zur Grundfläche und den Kugelhalbmesser zur Höhe hat.

Auf die vorhergehende Aufgabe angewendet, folgt

$$\frac{28}{3} \varrho^3 = \frac{1}{3} O . \varrho \quad \text{woraus} \quad O = 28 \varrho^2$$

474. 4. Beispiel. Ein Kreisausschnitt vom Halbmesser r und Zentriwinkel α wird zu einem Kreiskegel zusammengerollt. Welchen Rauminhalt hat dieser?

Der entstehende Kegel habe den Grundkreishalbmesser x und die Höhe y, dann ist die Mantellinie $\sqrt{x^2 + y^2}$ und daher der Mantel

$$M = \pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\alpha^0}{360^0} \pi r^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Grundkreisumfang

$$2 \pi x = \frac{\alpha^0}{360^0} . 2 \pi r \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

woraus

$$x = \frac{\alpha}{360} . r$$

und

$$y = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{360}\right)^2} . r$$

somit

$$V = \frac{1}{3} \pi . \left(\frac{\alpha}{360}\right)^2 r^2 . \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{360}\right)^2} . r$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{360}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{360}\right)^2} \pi r^3$$

475. 5. Beispiel. Wie muß sich der Halbmesser der Oeffnung zur Höhe eines kegelförmigen Trichters verhalten, wenn derselbe bei gegebener Wandung m qcm die meiste Flüssigkeit halten soll?

Hat der Trichter den Halbmesser x cm und die Höhe y cm, so ist

$$\frac{1}{3} \pi x^2 y = \max \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

mit der Bedingung

$$\pi x \sqrt{x^2 + y^2} = m; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

den Wert

$$y^2 = \frac{m^2}{\pi^2 x^2} - x^2$$

aus 2) in 1) eingesetzt, folgt

$$\frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{\frac{m^2}{\pi^2 x^2} - x^2} = \frac{1}{3} x \sqrt{m^2 - \pi^2 x^4} = \max$$

daher

$$x\sqrt{m^2 - \pi^2 x^4} > (x \pm \alpha)\sqrt{m^2 - \pi^2 (x \pm \alpha)^4}$$

oder $x^2 (m^2 - \pi^2 x^4) > (x^2 + 2\alpha x)(m^2 - \pi^2 x^4 - 4\pi^2 \alpha x^3)$

woraus

$$0 > \pm \alpha (-3\pi^2 x^4 + m^2) x$$

somit

$$x(-3\pi^2 x^4 + m^2) = 0$$

hieraus folgt

1. $x = 0$ giebt das Minimum: unbrauchbar.
2. $3\pi^2 x^4 - m^2 = 0$

woraus

$$x = \sqrt[4]{\frac{m^2}{3\pi^2}}$$

und daher

$$y = \sqrt{\frac{m^2 - \pi^2 x^4}{\pi^2 x^2}} = \sqrt{\frac{m^2 - \frac{m^2}{3}}{\pi^2 \sqrt[4]{\frac{m^4}{9\pi^4}}}} = \sqrt{\frac{2m\sqrt[4]{9}}{3\pi}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{4m^2 \cdot 3}{9\pi^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{m^2}{3\pi^2}}$$

daher

$$x : y = 1 : \sqrt{2}$$

In Worten: Halbmesser und Höhe stehen im selben Verhältnis wie die Seite und Diagonale eines Quadrats.

Ein Rechteck, dessen Seiten sich verhalten wie die Seite und Diagonale eines Quadrats, heißt ein „Rechteck schönster Form“. Der Achsenschnitt des konischen Trichters ist somit von einem Rechteck schönster Form derjenige Teil, der von der kleineren Seite und den Hälften der Diagonalen begrenzt wird.

476. 6. Beispiel. Einer Halbkugel vom Halbmesser R denjenigen abgestumpften Kegel einzubeschreiben, der den größten Mantel besitzt und den Grundkreis der Halbkugel zur Grundfläche hat?

Der Halbmesser des Deckkreises sei x, die Mantellinie y, so ist

$$\pi y (R + x) = \max \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

mit der Bedingung

$$R^2 = x^2 + (y^2 - [R - x]^2) \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

aus 2) folgt

$$x = R - \frac{y^2}{2R}$$

und somit

$$\pi y \left(R + R - \frac{y^2}{2R}\right) = \frac{\pi}{2R}(4R^2 - y^2)\, y = \max$$

daher

$$4R^2 y - y^3 > 4R^2 (y \pm \alpha) - (y \pm \alpha)^3$$

oder

$$4R^2 y - y^3 > 4R^2 y + 4\alpha R^2 - y^3 - 3\alpha y^2$$

woraus

$$0 > \pm \alpha (4R^2 - 3y^2)$$

somit

$$4R^2 - 3y^2 = 0$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$$

$$x = \frac{1}{3} R$$

$$M = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi R^2$$

Die von den Endpunkten des Durchmessers des Deckkreises gefällten Höhen begrenzen ein Rechteck schönster Form, dessen Diagonale y ist.

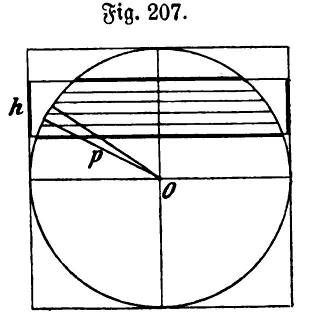
Kugel und Kugelteile.

Oberflächen.

477. Zwei unendlich benachbarte Parallelebenen schneiden die Kugelfläche nach zwei Kleinkreisen, welche einen unendlich schmalen Flächenstreifen der Kugel, eine sogen. Zone, begrenzen, die mit der Mantelfläche des den beiden Kleinkreisen als Grundkreisen zugehörigen senkrechten Kegelstumpfs verwechselt werden darf, da es gestattet ist, in dem durch eine zu den Kleinkreisen senkrechte Großkreisebene erzeugten Achsenschnitt den die Zone erzeugenden unendlich kleinen Großkreisbogen mit der zugehörigen Sehne, der Kegelstumpfmantellinie, zu verwechseln. Das Mittellot p zu dieser Mantellinie trifft die Achse des Kegelstumpfs im Kugelmittelpunkt und wird im Grenzfall zum Kugelhalbmesser R. Somit ergiebt sich, wenn h_1 der unendlich kleine Abstand beider Parallelebenen, die Fläche f_1 der unendlich schmalen Zone gemäß 468) aus $2\pi p h$ zu

$$f_1 = 2\pi R \,.\, h_1$$

Fig. 207.



Zerlegt man daher die Fläche Z einer Kugelzone mit der endlichen Höhe h durch Parallelebenen zu den Grundkreisen in unendlich viele, unendlich schmale Zonenstreifen mit den verschwindend kleinen Höhen h_1, h_2, . . ., so folgt

$$Z = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$$
$$= 2\pi R \,.\, h_1 + 2\pi R \,.\, h_2 + \ldots$$
$$= 2\pi R\,(h_1 + h_2 + \ldots)$$

oder

$$\mathbf{Z = 2\pi R \,.\, h}$$

Wird die eine der beiden Grundkreisebenen zur Berührungsebene an die Kugel, so wird die Zone zur Kugelhaube (Abschnitt, Segment, Kalotte). Ist h die Höhe der Haube, so ergiebt sich ihre Fläche H, wie bei der Zone, zu

$$\mathbf{H = 2\pi R \,.\, h}$$

Wird auch die andere Grundebene durch Parallelverschiebung zur Berührungsebene, so wird die Zone bezw. die Kugelhaube zur Oberfläche O der Kugel selbst, daher

$$O = 2\pi R \,.\, 2R$$

oder

$$\mathbf{O = 4\pi R^2}$$

somit

Satz: Die gekrümmte Fläche der Kugelzone bezw. Haube ist gleich dem zwischen die erweiterten Grundkreisebenen bezw. zwischen Grundkreis- und parallele Berührungsebene fallenden Stück der Mantelfläche des der Kugel umschriebenen, zu den Grundkreisen senkrechten Berührungscylinders.

Satz: Die Oberfläche der Kugel ist gleich dem Mantel des ihr umschriebenen quadratischen Berührungscylinders. Sie beträgt das Vierfache der Fläche eines erzeugenden Großkreises.

478. Bedeutung dieser Sätze für die Kugelabbildung. Erweitert man die Breitenkreis- und Meridianebenen bis zum Schnitt mit dem zum Aequator senkrechten, der Kugel umschriebenen Berührungscylinder, so bildet sich gemäß 477) jedes Rechteck des Gradnetzes als flächengleiches Rechteck ab, und da jedes Land sich aus einer mehr oder weniger großen Anzahl solcher Gradnetzrechtecke — man wähle dieselben nur sehr klein — und deren Dreieckshälften zusammensetzt, so hat auch die Abbildung eines Landes denselben Flächeninhalt, wie das Land selbst. Die Abbildung heißt daher flächengleich oder äquivalent. Sie ist nicht winkeltreu wie die Merkatorprojektion, auch erfolgt die Verzerrung gerade im entgegengesetzten Sinn, da die Abstände der Breitenkreise vom Aequator nach den Polen hin ab-, bei der Merkatorprojektion dagegen zunehmen. Die Pole selbst bilden sich ab als die beiden Grundkreise des Cylinders.

Was für eine Linie ist die Diagonale, welche ein auf die Cylinderfläche abgebildetes Rechteck in zwei flächengleiche Dreiecke teilt?

479. Vergleicht man den für die Fläche der Kugelhaube und Zone gefundenen Ausdruck $2\pi R h$ mit demjenigen für die Mantelfläche des Kegelstumpfs $2\pi p h$, so stimmen beide überein für $p = R$, d. h.

Satz: Die gekrümmte Fläche der Kugelhaube bezw. Zone ist gleich dem zwischen denselben Grundkreisebenen liegenden Kegelstumpfmantel, welcher den Kugelkreis berührt, dessen Ebene die Höhe halbiert.

Bedeutung für die Kegelabbildungen der Kugel?

Für die Vollkugel geht der Kegelstumpf in den Berührungscylinder über.

480. Ist s die vom Pol der Haube nach ihrem Grundkreis gezogene Sehne, so folgt, da

$$s^2 = 2Rh$$

auch

$$O = \pi s^2 = 2\pi R \,.\, h$$

daher

Satz: Die gekrümmte Fläche der Kugelhaube ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser die dem sphärischen Halbmesser des Grundkreises zugehörige Sehne ist.

Sonderfall: Für die Vollkugel wird $s = 2R$, daher

$$\pi s^2 = 4\pi R^2$$

Rauminhalte, berechnet nach der Exhaustionsmethode. Kugelausschnitt (Kugelsektor).

481. Der Kugelausschnitt kann entstanden gedacht werden durch Drehung eines Kreisausschnitts um die den Zentriwinkel halbierende Gerade. Der Bogen beschreibt eine Kugelhaube von der Höhe h, die Halbmesser einen auf dem Grundkreis der Haube aufruhenden senkrechten Kreiskegel. Zerlegt man die Fläche der Haube in unendlich viele unendlich schmale Flächenstückchen $f_1, f_2, f_3 \ldots$, deren jedes als eben betrachtet werden darf, so setzt sich der Sektor aus ebensovielen unendlich schmalen Kegeln zusammen, welche jene Flächenstückchen zu Grundflächen, den Kugelmittelpunkt zur gemeinsamen Spitze und den Kugelhalbmesser R zur Höhe haben. Daher ist das Volumen des Sektors

$$V = \frac{1}{3} f_1 \,.\, R + \frac{1}{3} f_2 \,.\, R + \ldots$$

$$= \frac{1}{3} R (f_1 + f_2 + \ldots)$$

$$= \frac{1}{3} R \,.\, 2\pi R h$$

oder

$$\mathbf{V = \frac{2}{3} \pi R^2 h}$$

wobei h die Höhe der zum Kugelsektor gehörigen Kugelhaube ist.

Kugel.

482. Wird h = R, so geht der Sektor in die Halbkugel über, somit für h = 2R, Volumen der Kugel

$$V = \frac{1}{3} R \,.\, 4\pi R^2$$

oder

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

somit

Satz: Die Kugel ist raumgleich einer Pyramide (Kegel), deren Grundfläche gleich der Oberfläche und deren Höhe gleich dem Halbmesser der Kugel ist.

Vergl. zu diesen Sätzen den über Rauminhalt, Oberfläche und Halbmesser der einbeschriebenen Kugel eines Vielflächners bestehenden Satz 473)

$$V = \frac{1}{3} \varrho \,.\, O$$

Kugelhaube.

483. Die Kugelhaube ergiebt sich als Unterschied des Ausschnitts und seines zugehörigen Kegels. Da zwei der drei Größen, Kugelhalbmesser R, Grundkreishalbmesser r und Haubenhöhe h die dritte bestimmen — geometrisch: man zeichne das erzeugende Segment aus je zwei dieser Bestimmungsstücke, algebraisch: die Strahlen von einem Punkt des Grundkreises nach den Endpunkten des zum Grundkreis senkrechten Kugeldurchmessers schließen einen rechten Winkel ein, daher die nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck zwischen obigen drei Größen bestehende Beziehung

$$r^2 = h\,(2R - h) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

— so erhält man für das Volumen V der Haube drei verschiedene Ausdrücke, von welchen jedoch nur die beiden in (R, h) und (r, h) gebräuchlich sind. Somit

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \,.\, h - \frac{1}{3} \pi r^2 (R - h)$$

$$= \frac{2}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h\,(2R - h)\,(R - h)$$

oder

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

Setzt man in diesem Ergebnis oder schon früher in dem noch unentwickelten Ausdruck V, für R seinen Wert in r und h aus 1)

$$R = \frac{r^2}{2h} + h = \frac{r^2 + 2h^2}{2h}$$

so folgt nach Vereinfachung der andere Ausdruck für das Volumen V der Haube

$$V = \frac{\pi}{6} h\,(3r^2 + h^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

Im Sonderfall für $h = R$ wird auch $r = R$ und die Haube wird zur Halbkugel, deren Volumen

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 (3R - R) = \frac{\pi}{6} R (3R^2 + R^2) = \frac{2}{3} \pi R^3$$

Kugelschicht (Zone).

484. Die Zone berechnet sich aus den beiden Halbmessern $r > r'$ der Grundkreise und der Höhe h als Unterschied der beiden Kugelhauben, die über den Grundkreisen nach derselben Seite hin sich erheben. Sind $x > y$ die Höhen dieser Hauben, so folgt

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 (3R - x) - \frac{\pi}{3} y^2 (3R - y)$$

$$= \frac{\pi}{3} [3R (x^2 - y^2) - (x^3 - y^3)]$$

$$= \frac{\pi}{3} (x - y) [3R (x + y) - (x^2 + xy + y^2)]$$

nun ist

$$h = x - y$$

$$r^2 = x (2R - x) \text{ woraus } Rx = \frac{r^2 + x^2}{2}$$

$$r'^2 = y (2R - y) \quad \text{„ „} \quad Ry = \frac{r'^2 + y^2}{2}$$

daher

$$V = \frac{\pi}{3} h \left[\frac{3}{2} (r^2 + x^2) + \frac{3}{2} (r'^2 + y^2) - (x^2 + xy + y^2)\right]$$

$$= \frac{\pi}{6} h [3r^2 + 3r'^2 + (x^2 + 2xy + y^2)]$$

$$\mathbf{V = \frac{\pi}{6} h (3r^2 + 3r'^2 + h^2)}$$

oder

$$V = \pi r^2 . \frac{h}{2} + \pi r'^2 . \frac{h}{2} + \frac{4}{3} \pi \left(\frac{h}{2}\right)^3$$

somit

Satz: Eine Kugelschicht ist raumgleich den beiden auf ihren Grundflächen ruhenden Cylindern von halber Höhe und einer Kugel von derselben Höhe.

Für $r' = 0$ geht die Zone in die Haube, für $r' = 0$ und $r = R = h$ in die Kugel über.

Rauminhalte, berechnet mittels des Cavalierischen Satzes.
Kugel.

485. Die Fläche des Kleinkreises, nach welchem eine beliebige im Abstand x zur Aequatorebene parallele Ebene die Kugel schneidet, ergiebt sich aus:

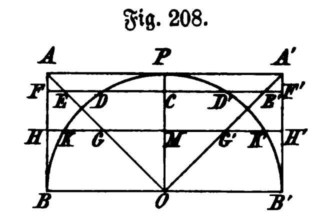
$$DC^2 = DO^2 - CO^2$$

durch Multiplikation mit π zu

$$\pi r^2 = \pi R^2 - \pi x^2$$

d. h. als Kreisring zwischen dem Umfang eines unveränderlichen und demjenigen eines veränderlichen Kreises. Bringt man diese Kreisringe in den bezüglichen Kleinkreisebenen zur Darstellung, so erscheinen die unveränderlichen Kreise vom Halbmesser R als Schnitte der Ebenen mit dem Mantel des der Kugel umschriebenen, zum Aequator senkrechten quadratischen Berührungscylinders, die veränderlichen als Schnitte mit dem Mantel des über der Deckfläche dieses Cylinders errichteten senkrechten Kreiskegels, der seine Spitze im Kugelmittelpunkt und einen erzeugenden Winkel von 45° hat, denn es ist alsdann CF = R und CE = CO = x, daher

Fig. 208.



$$\pi \, . \, DC^2 = \pi \, . \, CF^2 - \pi \, . \, CE^2$$

d. h. die Halbkugel und der durch Umdrehung des rechtwinkligen Dreiecks ABO um OP erzeugte ringförmige Hohlkörper, der übrig bleibt, wenn der Kegel vom Cylinder abgezogen wird, haben in gleicher Höhe gleiche Schnittflächen, sind also Cavalierische Körper und somit raumgleich. Daher

$$\text{Halbkugel} = \text{Cylinder} - \text{Kegel}$$
$$= \pi R^2 . R - \frac{1}{3} \pi R^2 . R$$
$$= \frac{2}{3} \pi R^3$$

Zugleich ergiebt sich das Verhältnis der Inhalte

$$\text{Kegel} : \text{Halbkugel} : \text{Cylinder} = \frac{1}{3} \pi R^3 : \frac{2}{3} \pi R^3 : \pi R^3$$
$$= 1 : 2 : 3$$

Kugelhaube.

486. Die Kugelhaube DPD' ist nach dem Cavalierischen Satz raumgleich dem ringförmigen Körper AFEA'F'E' und dieser selbst ergiebt sich als Unterschied des Cylinders AFF'A' und des Kegelstumpfs AEE'A'. Ist CP = h

die gemeinsame Höhe dieser Körper, so folgt $CE = CO = R - h$ und somit das Volumen V der Haube

$$V = \pi R^2 . h - \frac{\pi}{3} [R^2 + R (R - h) + (R - h)^2]$$
$$= \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$$

Kugelschicht (Zone).

487. Die Zone DKK'D' berechnet sich als Unterschied des Cylinders FHH'F' und des Kegelstumpfs EKK'E'. Sind $OC = u$ und $OM = v$ die Entfernungen der Grundkreisebenen vom Kugelmittelpunkt, also zugleich die Halbmesser der Grundkreise des Kegelstumpfs, so folgt

$$V = \pi R^2 . h - \frac{\pi}{3} (u^2 + uv + v^2) h$$

Hier sind für u, v, R die Halbmesser r und r' der Grundkreise und die Höhe der Zone

$$h = u - v$$

einzuführen. Um keinen der Werte

$$R^2 = u^2 + r^2 \text{ und } R^2 = v^2 + r'^2$$

vor dem anderen zu bevorzugen, setzen wir der symmetrischen Behandlung wegen das Mittel

$$R^2 = \frac{u^2 + v^2 + r^2 + r'^2}{2}$$

dann wird

$$V = \frac{\pi}{3} \left[\frac{3}{2} (u^2 + v^2 + r^2 + r'^2) - (u^2 + uv + v^2)\right] h$$
$$= \frac{\pi}{6} [3r^2 + 3r'^2 + (u^2 - 2uv + v^2)] h$$
$$= \frac{\pi}{6} (3r^2 + 3r'^2 + h^2) h$$

Beispiele.

488. 1. Beispiel. Eine Kugel vom Halbmesser R hat eine cylindrische Durchbohrung, deren lichte Weite 2r ist. Gesucht das Volumen des übrig bleibenden Kugelrings.

Die halbe Höhe des Rings bezw. des Cylinders sei h, so ist das Volumen desselben

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 - \pi r^2 . 2h - 2 . \frac{\pi}{3} (R - h)^2 (3R - R + h)$$
$$= - 2\pi r^2 . h + 2\pi R^2 . h - \frac{2}{3} \pi h^3$$

$$= 2\pi h (R^2 - r^2) - \frac{2}{3} \pi h^3$$
$$= 2\pi h \,.\, h^2 - \frac{2}{3} \pi h^3$$
$$= \frac{4}{3} \pi h^3$$

d. h. der Ring ist raumgleich einer Kugel, welche die Höhe des Rings zum Durchmesser hat. Daher sind auch alle aus demselben Stoff gefertigten Kugelringe von derselben Höhe, gleichgültig, welches der Kugelhalbmesser oder die lichte Weite der Durchbohrung sein mag, gleich schwer.

489. 2. Beispiel. Wie groß ist die Höhe einer Kugelhaube, die $1\frac{1}{5}$mal so groß ist als der Mantel des auf demselben Grundkreis (auf entgegengesetzter Seite) stehenden geraden Kegels, dessen Spitze auf der Kugelfläche liegt? Wie verhält sich das Volumen des aus Haube und Kegel bestehenden Körpers zu demjenigen der Kugel? Gegeben der Kugelhalbmesser R.

Ist x die Höhe der Haube, y der Halbmesser des Grundkreises und s die Kegelmantellinie, so folgt

$$2\pi R \,.\, x = \frac{6}{5} \pi y s$$

wobei

$$y^2 = x (2R - x)$$

und

$$s^2 = 2R (2R - x)$$

daher

$$2\pi R \,.\, x = \frac{6\pi}{5} \sqrt{x (2R - x)} \sqrt{2R (2R - x)}$$
$$= \frac{6\pi}{5} (2R - x) \sqrt{2Rx}$$

Der gemeinschaftliche Faktor beider Seiten

$$\sqrt{2Rx} = 0$$

giebt eine erste Lösung: Für diesen Fall wird der Kegel zum Kugeldurchmesser, die Haube zu dessen Endpunkt. Es bleibt daher

$$\sqrt{2Rx} = \frac{6}{5} (2R - x)$$

woraus

$$18x^2 - 97x = - 72R^2$$

und somit

$$x = \frac{97R \pm 65R}{36}$$

somit der einzig brauchbare Wert, da $x < 2R$ sein muß,

$$x = \frac{8}{9} R$$

$$\text{Volumen des Körpes} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{64}{81} R^2 \cdot \frac{19}{9} R + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{8}{9} R \cdot \frac{10}{9} R \cdot \frac{10}{9} R$$

$$= \frac{1216}{2187} \pi R^3$$

daher

$$\frac{\text{Körper}}{\text{Kugel}} = \frac{1216}{2187} \pi R^3 : \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$= \frac{1216 \cdot 3}{2187 \cdot 4} = \frac{504}{729} : 1 = 0{,}69 : 1$$

$$= \frac{1}{\frac{729}{504}} = \frac{1}{1\frac{25}{56}} = 1 : 1{,}45$$

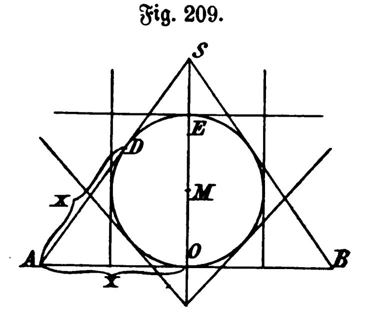
d. h.

$$\text{Kugel} = 1{,}45 \times \text{Körper}.$$

490. 3. Beispiel. Einer Kugel vom Halbmesser R den kleinsten Kegel zu umschreiben.

Umschreibt man der Kugel die verschiedensten Kegel, so ergiebt sich als eine Grenzform ein unendlich hoher Cylinder, als andere ein Parallelebenenpaar. Zwischen diesen Maxima des Rauminhalts muß das Minimum liegen. Ist x der Grundkreishalbmesser, y die Höhe, also $\sqrt{x^2 + y^2}$ die Mantellinie des gesuchten Kegels, so soll werden

Fig. 209.



$$\frac{1}{3} \pi x^2 y = \min$$

mit der, aus dem Satz über das Quadrat der Tangente folgenden Bedingung

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - x)^2 = y(y - 2R)$$

woraus nach zweimaligem Quadrieren

$$x^2 = \frac{y}{y - 2R} \cdot R^2$$

daher

$$\frac{1}{3} \pi \cdot \frac{y}{y - 2R} \cdot R^2 y = \min$$

wobei es genügt

$$\frac{y^2}{y - 2R} = \min$$

zu machen. Somit

$$\frac{y^2}{y - 2R} < \frac{(y \pm \alpha)^2}{(y \pm \alpha) - 2R}$$

entwickelt mit $+ \alpha$

$$y^3 + \alpha y^2 - 2Ry^2 < y^3 + 2\alpha y^2 - 2Ry^2 - 4\alpha Ry$$

oder

$$0 < \pm \alpha (y - 4R) y$$

somit

$$y(y - 4R) = 0$$

Die Lösung $y = 0$ entspricht dem Fall des Minimum, wenn der Kegel zum Punkt zusammenschrumpft. (Die Kugel als anbeschriebene Kugel zu betrachten.) Die wirklich brauchbare Lösung ist daher

$$y - 4R = 0$$

$$y = 4R \qquad \text{und} \qquad x = \sqrt{2} \cdot R$$

somit

$$\frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{8}{3}\pi R^3 \text{ d. h. Kegel } = 2 \times \text{Kugel}.$$

491. 4. Beispiel. Wie hoch müßte man sich über die Erdoberfläche erheben, um eine Fläche von F qkm zu überblicken?

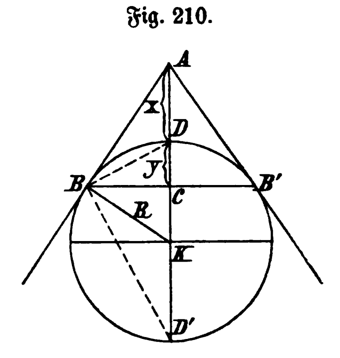


Fig. 210.

Die von der Höhe x km aus überblickte Fläche F ist eine Kugelhaube von der Höhe y, deren Grundkreis (Horizont) durch den vom Standpunkt aus an die Erdkugel gelegten Berührungskegel bestimmt wird. Da

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BD'D = \sphericalangle DBB'$$

letztere als Peripheriewinkel über den gleichen Bögen $BD = B'D$, so folgt

$$\frac{x}{y} = \frac{AB}{BC} \text{ und } \frac{AB}{BC} = \frac{AK}{BK} = \frac{R + x}{R} \text{ aus } \triangle ACB \backsim \triangle ABK$$

somit

$$\frac{x}{y} = \frac{R + x}{R} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 1)$$

und

$$2\pi R \cdot y = F \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad 2)$$

aus diesen zwei Gleichungen bestimmen sich die Unbekannten x und y, insbesondere

$$x = \frac{F}{2\pi R^2 - F} \cdot R \text{ km}$$

492. 5. Beispiel. Einem regelmäßigen Tetraeder von der Kante a ist eine Kugel einbeschrieben, dem übrigen der Spitze zu gelegenen Raum wieder eine die vorhergehende berührende Kugel u. s. f. Berechne die Summe der Inhalte all dieser unendlich vielen Kugeln und das Verhältnis der ersten zur Summe aller übrigen.

Sind ϱ, ϱ_1, ϱ_2 ... die Halbmesser dieser Kugeln, h, h_1, h_2 ... die Höhen der Tetraeder, denen sie einbeschrieben sind, so folgt

$$\varrho = \frac{h}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a \qquad h_1 = 2\varrho$$

$$\varrho_1 = \frac{h_1}{4} = \frac{1}{2}\varrho \qquad h_2 = 2\varrho_1$$

$$\varrho_2 = \frac{h_2}{4} = \frac{1}{4}\varrho \qquad h_3 = 2\varrho_2$$

$$\varrho_3 = \frac{h_3}{4} = \frac{1}{8}\varrho \qquad h_4 = 2\varrho_3$$

u. s. f., somit die Summe S aller Kugeln

$$S = \frac{4\pi}{3}(\varrho^3 + \varrho_1^3 + \varrho_2^3 + \ldots)$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2^3}\right)^3 + \ldots\right]\varrho^3$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \ldots\right)\varrho^3$$

Nun ist die Summe s einer geometrischen Reihe von n Gliedern

$$s = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$

$$= a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a$$

für $n = \infty$ und q ein echter Bruch, wird $q^n = 0$, daher

$$s = \frac{1}{1 - q} \cdot a$$

und somit

$$S = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} \cdot \varrho^3 = \frac{32}{21}\pi\varrho^3 = \frac{\sqrt{6}}{189}\pi a^3$$

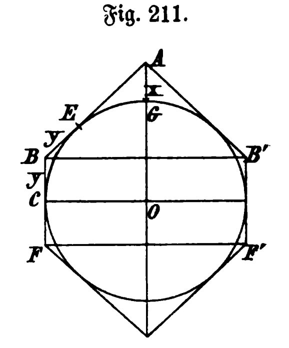
ferner

$$\text{I. Kugel} : S = \frac{4}{3}\pi\varrho^3 : \frac{32}{21}\pi\varrho^3 = 7 : 8$$

d. h die I. Kugel $= 7 \times$ Summe aller übrigen.

493. 6. Beispiel. Auf der Achse eines einer Kugel vom Halbmesser R umschriebenen Cylinders zwei vom Kugelmittelpunkt nach entgegengesetzten Seiten gleichweit entfernte Punkte so zu bestimmen, daß die Oberfläche des vom Cylinder und den beiden, von den Punkten an die Kugel gelegten Berührungskegeln gebildeten Körpers ein Minimum wird.

Fig. 211.



Es genügt, die halbe Oberfläche zu einem Minimum zu machen. Ist y die halbe Cylinderhöhe, $x + R$ die Entfernung des einen der gesuchten Punkte vom

Kugelmittelpunkt, so ergiebt sich die von diesem Punkt an die Kugel gelegte Tangente aus

$$AE^2 = x(x + 2R)$$

und somit die Kegelmantellinie

$$AB = y + \sqrt{x(x + 2R)}$$

folglich

$$2\pi R \cdot y + \pi R\left(y + \sqrt{x(x + 2R)}\right) = \pi R\left(3y + \sqrt{x(x + 2R)}\right) = \min$$

oder

$$3y + \sqrt{x(x + 2R)} = \min \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

mit der aus $\triangle AFB$ folgenden Bedingung

$$\left(y + \sqrt{x(x + 2R)}\right)^2 = (x + R - y)^2 + R^2 \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

woraus

$$y\sqrt{x(x + 2R)} = R^2 - xy - Ry \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2a)$$

und

$$0 = R^2(R^2 + y^2 - 2xy - 2Ry)$$

woraus

$$x = \frac{R^2}{2y} + \frac{y}{2} - R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2b)$$

Setzt man in 1) den Wert der Wurzelgröße aus 2a) und in diesem selbst wieder den Wert für x aus 2b), so folgt

$$3y + \frac{R^2}{y} - x - R = 3y + \frac{R^2}{y} - \frac{R^2}{2y} - \frac{y}{2} + R - R$$

oder

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5y^2 + R^2}{y} = \min$$

somit

$$\frac{5y^2 + R^2}{y} < \frac{5(y \pm \alpha)^2 + R^2}{y \pm \alpha}$$

daher

$$5y^2(y + \alpha) + R^2(y + \alpha) < 5y(y + \alpha)^2 + R^2y$$

oder

$$5y^3 + 5\alpha y^2 + R^2y + \alpha R^2 < 5y^3 + 10\alpha y^2 + R^2y$$

woraus

$$0 < \pm\alpha(5y^2 - R^2)$$

somit

$$5y^2 - R^2 = 0$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{5}R$$

$$x = \frac{3\sqrt{5}}{5}R - R$$

Zur Bestimmung des erzeugenden Winkels φ des gesuchten Kegels hat man

$$AF = x + R - y = \frac{2\sqrt{5}}{5} R$$

$$AB = y + \sqrt{x(2R - x)} = \frac{3\sqrt{5}}{5} R$$

somit

$$\frac{AF}{AB} = \frac{2}{3} = \cos \varphi$$

Zeichne hiernach $\sphericalangle \varphi$. Die Mantelfläche M ergiebt sich zu

$$M = 2\pi R (3y + \sqrt{x(x + 2R)})$$
$$= 2\sqrt{5} . \pi R^2$$

Die Guldinschen Sätze über Rauminhalt und Oberfläche von Umdrehungskörpern.*)

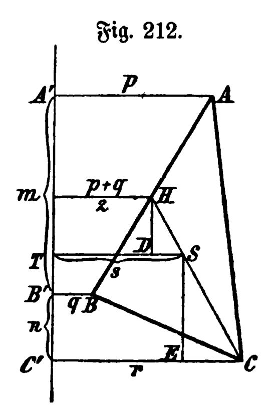


Fig. 212.

494. A. Ein beliebiges $\triangle$ ABC drehe sich um eine beliebige feste Gerade seiner Ebene, die aber außerhalb des Dreiecks liegen soll, als Achse. Durch die Abstände p, q, r seiner drei Ecken von der Achse und den Projektionen m und n der beiden kleineren Seiten auf dieselbe ist Lage und Gestalt des Dreiecks eindeutig bestimmt. Die von den Seiten des Dreiecks beschriebenen Kegelstumpfmäntel, die zu je zweien in den drei von den Ecken beschriebenen Kreisen zusammenstoßen, umgrenzen den von $\triangle$ ABC beschriebenen Umdrehungskörper, dessen Inhalt V sich aus den Rauminhalten jener Kegelstumpfe wie folgt berechnet:

$$V = \text{Kegelstumpf } AA'C'C - \text{Kegelstumpf } AA'B'B - \text{Kegelstumpf } BB'C'C$$
$$= \frac{\pi}{3}(m+n)(p^2+pr+r^2) - \frac{\pi}{3} m (p^2+pq+q^2) - \frac{\pi}{3} n (q^2+qr+r^2)$$
$$= \frac{\pi}{3}[m(pr + r^2 - pq - q^2) + n(p^2 + pr - q^2 - qr)]$$
$$= \frac{\pi}{3}\Big[m\big(p(r-q) + (r+q)(r-q)\big) + n\big(r(p-q) + (p+q)(p-q)\big)\Big]$$
$$= \frac{\pi}{3}[m(r-q)(p+q+r) + n(p-q)(p+q+r)]$$
$$= \frac{\pi}{3}(p+q+r)[m(r-q) + n(p-q)]$$

---

*) Guldin, Professor der Mathematik in Graz, gestorben 1643.

Vermehrt und vermindert man den letzten Klammerausdruck, der Symmetrie wegen, um die fehlenden Glieder mp und nr, so läßt sich schreiben

$$\begin{aligned} m(r-q)+n(p-q) &= (m+n)(p+r) - m(p+q) - n(q+r) \\ &= 2 \,.\, \text{Trapez } AA'C'C - 2 \,.\, \text{Trapez } AA'B'B - 2 \,.\, \text{Trapez } BB'C'C \\ &= 2 \,.\, \triangle ABC \end{aligned}$$

Um auf die Bedeutung des anderen Klammerfaktors von V zu gelangen, bemerkt man, daß die Mitte H von AB den Achsenabstand $\frac{p+q}{2}$, die Ecke C den Abstand r hat. Es ist daher zu vermuten, daß eine gewisse Zwischenparallele zu den Parallelseiten des Trapezes HH'C'C einen gewissen Bruchteil jenes Faktors $p+q+r$ darstellt. Die Mittellinie dieses Trapezes selbst, welche HC im Verhältnis 1 : 1 teilt, ist es nicht, wie man ohne weiteres sieht, also vielleicht diejenige, welche HC im nächst einfacheren Verhältnis 1 : 2 teilt, das wäre der Abstand $ST = s$ des Schwerpunkts S des gegebenen Dreiecks. Zieht man HD und SE parallel zur Achse, so ist $\triangle HDS \backsim SEC$, somit

$$\frac{SD}{EC} = \frac{SH}{SC} \quad \text{oder} \quad \frac{s - \frac{p+q}{2}}{r-s} = \frac{1}{2}$$

woraus

$$2s - (p+q) = r - s$$

und somit wirklich

$$s = \frac{p+q+r}{3}$$

daher

$$\begin{aligned} V &= \pi \,.\, \frac{p+q+r}{3} \,.\, 2\triangle \\ &= 2\pi s \,.\, \triangle \end{aligned}$$

d. h.

Der vom Dreieck △ beschriebene Umdrehungskörper ist raumgleich einem Prisma, welches das erzeugende Dreieck zur Grundfläche und den Umfang des vom Schwerpunkt der Dreiecksfläche beschriebenen Kreises zur Höhe hat.

Dreht sich statt des Dreiecks ein Viereck um die Achse, so zerfällt dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke mit den Flächen f_1 und f_2, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 die Achsenabstände s_1 und s_2 haben mögen. Dann ist nach dem Vorigen der Rauminhalt des vom Viereck erzeugten Umdrehungskörpers

$$V = 2\pi s_1 \,.\, f_1 + 2\pi s_2 \,.\, f_2$$

Denkt man sich in den Schwerpunkten dieser Teildreiecke Gewichte angebracht, welche im Verhältnis der bezüglichen Flächen $f_1 : f_2$ zu einander stehen, und teilt man die Verbindungsgerade $S_1 S_2$ dieser Schwerpunkte, dieselbe als mathematischen Hebel betrachtend, nach dem Hebelgesetz so, daß die Hebelarme sich umgekehrt verhalten wie die zugehörigen Gewichte, so ist der erhaltene Teilpunkt S, dessen Achsenabstand s sein möge, der Schwerpunkt der Fläche des erzeugenden Vierecks. Schwerpunkt einer Fläche ist derjenige Punkt, der allein unterstützt zu werden braucht, um die Fläche im Gleichgewicht zu halten. In

diesem Punkt hat man sich gewissermaßen die ganze Fläche vereinigt zu denken. Zieht man durch S_1 und S die Parallelen zur Achse, so ist $\triangle S_1PS \sim \triangle SQS_2$, daher

$$\frac{SP}{SQ} = \frac{SS_1}{SS_2} \quad \text{oder} \quad \frac{s - s_1}{s_2 - s} = \frac{f_2}{f_1}$$

Fig. 213.

woraus

$$s f_1 - s_1 f_1 = s_2 f_2 - s f_2$$

oder

$$s = \frac{s_1 f_1 + s_2 f_2}{f_1 + f_2}$$

oder

$$s_1 \, . \, f_1 + s_2 \, . \, f_2 = s \, (f_1 + f_2)$$

und somit

$$2\pi s_1 \, . \, f_1 + 2\pi s_2 \, . \, f_2 = 2\pi s \, (f_1 + f_2) = V$$

Der für den Rauminhalt des Umdrehungskörpers eines erzeugenden Dreiecks ausgesprochene Satz gilt somit auch für ein erzeugendes Viereck und schließlich, wenn man die Betrachtung in dieser Weise fortsetzt, für jedes beliebige erzeugende Vieleck, auch wenn dasselbe unendlich viele unendlich kleine Seiten hat, d. h. für jedes von einer beliebigen Kurve umschlossene Flächenstück. Dies ist

der Guldinsche Satz über die Rauminhalte von Umdrehungskörpern: Der Inhalt eines von einem beliebigen ebenen Flächenstück F durch Drehung um eine feste das erzeugende Flächenstück nicht schneidende Gerade seiner Ebene als Achse ist gleich einem Prisma, welches das erzeugende Flächenstück zur Grundfläche und den Umfang des vom Schwerpunkt des Flächenstücks beschriebenen Kreises zur Höhe hat.

$$\mathbf{V = 2\pi s \, . \, F}$$

495. Der, der Drehung α^0 entsprechende Raumteil des Umdrehungskörpers ist

$$V = \frac{\alpha}{360} \, . \, 2\pi s \, . \, F$$

496. Außer zur Berechnung der Rauminhalte benützt man den Guldinschen Satz zur Bestimmung des Schwerpunkts ebener Flächenstücke. Läßt man diese um eine möglichst günstig gelegene Gerade ihrer Ebene sich drehen und gelingt es auf irgend eine Weise das Volumen des erzeugten Umdrehungskörpers zu ermitteln, so folgt

$$s = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{V}{F}$$

Beispiele.

497. 1. Beispiel. Ein Kreis vom Halbmesser r dreht sich um eine ihn nicht schneidende Gerade seiner Ebene. Berechne den Rauminhalt des entstehenden Wulstes.

Ist a die Entfernung der Achse vom Kreismittelpunkt, so folgt

$$V = 2\pi a \,.\, \pi r^2 = 2\pi^2 \,.\, a r^2$$

498. 2. Beispiel. Ein Rechteck dreht sich um eine zu einer Seite parallele Gerade seiner Ebene. Den entstehenden Cylinderring zu berechnen.

Sind R und r die Abstände der den Achsen parallelen Seiten h, so folgt, da der Diagonalschnittpunkt Schwerpunkt des Rechtecks ist,

$$V = 2\pi \left(r + \frac{R - r}{2}\right) . (R - r)\, h$$

$$= \pi (R^2 - r^2)\, h \qquad \text{(vergl. 453)}$$

499. 3. Beispiel. Berechne das Volumen des senkrechten Kreiskegels.

Der Abstand s des Schwerpunkts des erzeugenden rechtwinkligen Dreiecks von der als Achse dienenden Kathete ergiebt sich aus

$$s : \frac{r}{2} = 2 : 3$$

daher

$$V = 2\pi \,.\, \frac{r}{3} \,.\, \frac{rh}{2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \,.\, h$$

500. 4. Beispiel. Bestimme den Schwerpunkt der Fläche eines Halbkreises.

Durch Drehung des Halbkreises um seinen Durchmesser entsteht eine Kugel von bekanntem Volumen. Ist daher x der Achsenabstand des Schwerpunkts, der, der Symmetrie wegen, auf dem zur Achse senkrechten Halbmesser liegt, so folgt

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi x \,.\, \frac{1}{2}\pi R^2$$

woraus

$$x = \frac{4}{3\pi} R$$

501. 5. Beispiel: Den Schwerpunkt eines gleichschenkligen Trapezes zu bestimmen.

Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse des Trapezes im Abstand x von der größeren Parallelseite. Denselben Abstand haben die Schwerpunkte beider Trapezhälften, die durch die Symmetrieachse entstehen. Es genügt daher, die eine Trapezhälfte um die größere Grundseite $r > r'$ zu drehen, wobei ein aus Cylinder und Kegel bestehender Körper erzeugt wird, dann ist

$$\pi h^2 \,.\, r' + \frac{1}{3}\pi h^2 (r - r') = 2\pi x \,.\, \frac{r + r'}{2} \,.\, h$$

woraus

$$x = \frac{1}{3} \,.\, \frac{r' h}{r + r'} + \frac{h}{3}$$

Bestimme x durch Zeichnung und ziehe im Abstand x zur größeren Parallelseite die Parallele, so bestimmt diese auf der Symmetrieachse den Schwerpunkt.

Um den Schwerpunkt der Trapezhälften zu ermitteln, ist noch der Abstand y von der Symmetrieachse zu ermitteln. Ist letztere die Drehachse, so folgt

$$\frac{\pi}{3}(r^2 + r r' + r'^2)h = 2\pi y \cdot \frac{r + r'}{2} \cdot h$$

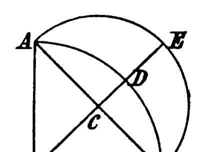
woraus

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{r^2 + r r' + r'^2}{r + r'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2}$$

Geometrische Zeichnung dieser Strecke?

502. 6. Beispiel. Ueber der Hypotenuse a eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks sei nach außen ein Halbkreis und ein Quadrant beschrieben, dessen Mittelpunkt der Scheitel des rechten Winkels ist. Das Ganze drehe sich um die Halbierungslinie des rechten Winkels. Berechne den Raum des Umdrehungskörpers, der durch die von den Kreisbögen umgrenzte Sichelfläche erzeugt wird. Wo liegt der Schwerpunkt der Sichel?

Fig. 214.



Das gesuchte Volumen V wird erhalten, wenn man den Kegel, der das rechtwinklige Dreieck zum Achsenschnitt hat, um die über seinem Grundkreis sich erhebende Kugel vermehrt und um den Kugelausschnitt, der durch den Quadranten erzeugt wird, vermindert. Die Katheten sind $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, daher sind die Volumina

des Kegels $K = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi}{24}a^3$

der Halbkugel $H = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{12}a^3$

des Sektors $S = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{6}\pi a^3$

somit

$$V = K + H - S = \frac{7 - 4\sqrt{2}}{24}\pi a^3$$

Die Schwerpunkte der Sichel, des Segments und des Halbkreises liegen sämtlich auf der Umdrehungsachse; letzterer teilt die Entfernung der beiden ersteren im umgekehrten Verhältnis der zugehörigen Flächen.

Dreht sich das Segment um eine zu seiner Sehne parallele Achse durch den Scheitel des rechten Winkels, so entsteht ein Kugelring mit cylindrischer Durchbohrung von der Höhe a, dessen Volumen bekannt ist (488). Hat der Schwerpunkt des Segments vom Scheitel die Entfernung s, so ist nach dem Guldinschen Satz

$$2\pi s \cdot \left[\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right] = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$$

woraus

$$s = \frac{2}{3(\pi - 2)}\,a$$

Mit Benützung des 4. Beispiels ergiebt sich die Entfernung s' des Schwerpunkts des Halbkreises vom Scheitel des rechten Winkels

$$s' = \frac{a}{2} + \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{a}{2} = \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)\frac{a}{2}$$

und somit, wenn x der Abstand der Schwerpunkte des Halbkreises und der Sichel, f_1 und f_2 die Flächen des Segments und der Sichel

$$\frac{x}{s' - s} = \frac{f_1}{f_2}$$

Durch Einsetzung der Werte

$$s' - s = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3\pi(\pi - 2)}\right)a$$

$$f_1 = \frac{\pi - 2}{8}\,a^2$$

$$f_2 = \frac{1}{2}\,\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{\pi - 2}{8}\,a^2$$

$$= \frac{1}{4}\,a^2$$

wobei sich zeigt, daß die Sichel dem rechtwinkligen Dreieck flächengleich ist, folgt

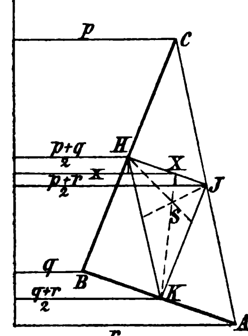
$$x = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{a}{2} - \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$$

und somit der Abstand des Schwerpunkts von der Sehne

$$x + s' - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(\pi\,\frac{a}{2} - a\right)$$

d. h. der halbe Unterschied zwischen dem die Sichel begrenzenden Halbkreis und seinem Durchmesser, der Sehne der Sichel, ist der Abstand des Flächenschwerpunkts der Sichel von ihrer Sehne.

Fig. 215.



503. B. Die Oberfläche des vom △ ABC erzeugten Umdrehungskörpers berechnet sich als die Summe der von den Seiten beschriebenen Kegelstumpfmäntel zu

$$O = \pi a(p + q) + \pi b(p + r) + \pi c(q + r)\,. \quad 1)$$

Betrachtet man die Seiten des Mittendreiecks HJK als Hebel, in deren Endpunkten Gewichte wirken, die den bezüglichen Seiten proportional sind, so erkennt man, daß die Achsenabstände der Drehpunkte dieser Hebel sich in den Produkten der Seiten des Dreiecks

ABC mit den Achsenabständen der Eckpunkte desselben darstellen lassen. Teilt man z. B. die Seite HJ in X im Verhältnis

$$XH : XJ = b : a$$

am einfachsten durch Halbieren des Gegenwinkels HJK auf Grund des Satzes: die Halbierungslinie eines Dreieckwinkels teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten, und fällt von H und X die Lote auf die Achsenabstände x und $\frac{p+r}{2}$ der Punkte X und J, so erhält man aus der Aehnlichkeit der entstehenden rechtwinkligen Dreiecke

$$\frac{x - \frac{p+q}{2}}{\frac{p+r}{2} - x} = \frac{b}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

woraus

$$x\,(a + b) = a \cdot \frac{p+q}{2} + b \cdot \frac{p+r}{2}$$

X ist der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Dreieckseiten a und b, in ihm hat man sich ein der Summe a + b dieser Seiten proportionales Gewicht wirkend zu denken. Teilt man schließlich, um auch die dritte Seite c in Betracht zu ziehen, XK im Punkt S im Verhältnis

$$XS : SK = c : (a + b)$$

so ist S der Schwerpunkt des Umfangs des Dreiecks ABC, d. h. derjenige Punkt, in welchem man sich das Gewicht des als schwer gedachten Umfangs des Dreiecks ABC vereinigt zu denken hat, dessen Unterstützung also, wenn man sich ihn durch gewichtlose starre Fäden mit dem Umfang verbunden denkt, genügen würde, diesen im Gleichgewicht zu halten. Dieselbe Betrachtung wie diejenige für XK, auf die anderen Seiten des △ HJK angewendet, ergiebt, daß der Umfangsschwerpunkt auch auf den beiden anderen inneren Winkelhalbierenden dieses Dreiecks liegen muß, daß er somit der Mittelpunkt des Inkreises des Mittendreiecks ist. Fällt man von X und S die Lote auf die Achsenabstände s und $\frac{q+r}{2}$ der Punkte S und K, so folgt aus der Aehnlichkeit der entstehenden rechtwinkligen Dreiecke

$$\frac{s - x}{\frac{q+r}{2} - s} = \frac{c}{a+b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

woraus

$$(a + b)\,s + c \cdot s = (a + b)\,x + c \cdot \frac{q+r}{2}$$

oder

$$(a + b + c)\,s = a \cdot \frac{p+q}{2} + b \cdot \frac{p+r}{2} + c \cdot \frac{q+r}{2}$$

woraus durch Multiplikation mit 2π

$$2\pi s\,(a + b + c) = \pi a\,(p + q) + \pi b\,(p + r) + \pi c\,(q + r)$$

d. h.

$$O = 2\pi s (a + b + c)$$

In Worten: Die Oberfläche des von einem Dreieck erzeugten Umdrehungskörpers, dessen Achse eine das Dreieck nicht schneidende Gerade der Dreiecksebene ist, ist gleich der Seitenfläche eines über dem erzeugenden Dreieck als Grundfläche errichteten senkrechten Prismas, das den vom Umfangsschwerpunkt des Dreiecks beschriebenen Kreis zur Höhe hat.

Dehnt man diese Betrachtung auf das Viereck aus, dessen Seiten die Achsenabstände p, q, r, t haben mögen, so bleibt die Beziehung 1) für den Schwerpunkt X der Seiten a und b; für den Schwerpunkt Y auf der, X mit der Mitte der dritten Seite c verbindenden Strecke folgt

$$\frac{y - x}{\frac{r + t}{2} - y} = \frac{c}{a + b}$$

woraus

$$y (a + b + c) = x (a + b) + c \cdot \frac{r + t}{2}$$

mittels 1)

$$= a \cdot \frac{p + q}{2} + b \cdot \frac{q + r}{2} + c \cdot \frac{r + t}{2}$$

Endlich ergiebt sich für den Achsenabstand s des Umfangsschwerpunkts S auf der Verbindungsstrecke von Y mit der Mitte der letzten Seite d

$$\frac{s - y}{\frac{p + t}{2} - s} = \frac{d}{a + b + c}$$

woraus

$$s (a + b + c + d) = y (a + b + c) + d \cdot \frac{p + t}{2}$$

$$= a \cdot \frac{p + q}{2} + b \cdot \frac{p + r}{2} + c \cdot \frac{r + t}{2} + d \cdot \frac{p + t}{2}$$

und somit

$$2\pi s (a + b + c + d) = \pi a (p + q) + \pi b (q + r) + \pi c (r + t) + \pi d (p + t)$$

oder

$$O = 2\pi s (a + b + c + d)$$

d. h. der Satz über die Umdrehungsfläche des Dreiecks gilt auch für das Viereck und somit für jedes beliebige Vieleck bezw. für jede beliebige ebene Kurve. Daher lautet

der Guldinsche Satz über die Oberflächen von Umdrehungskörpern: Die Oberfläche des von einem beliebig umgrenzten ebenen Flächenstück erzeugten Umdrehungskörpers, dessen Achse eine den Umfang U des Flächenstücks nicht schneidende Gerade der Ebene desselben ist, ist gleich der Seiten- oder Mantelfläche eines über dem erzeugenden Flächenstück als Grundfläche errichteten

senkrechten Prismas bezw. Cylinders, dessen Höhe der vom Umfangsschwerpunkt der Grundfläche beschriebene Kreis ist:

$$O = 2\pi s . U$$

504. Die Guldinschen Sätze gelten noch für eine allgemeinere Gruppe von Flächen, die entstehen, wenn ein fester Punkt eines erzeugenden ebenen Flächenstücks eine beliebige Leitlinie so durchläuft, daß die bewegliche Ebene zur Richtung der Bewegung, d. h. zur Tangente der Leitlinie im betreffenden Punkt, stets senkrecht bleibt. Diese Flächen heißen Kanalflächen.

Für die Umdrehungsflächen ist die Leitlinie ein Kreis.

Bewegt sich z. B. ein Kreis vom Halbmesser r in der vorgeschriebenen Weise längs einer Linie von der Länge l, so hat die entstehende Röhre

den Rauminhalt $V = \pi r^2 . l$
die Oberfläche $O = 2\pi r . l$

Beispiele.

505. 1. Beispiel. Berechne die Oberfläche eines Kreiswulstes von der Dicke 2r und der lichten Weite 2a.

Der Mittelpunkt des erzeugenden Kreises ist sowohl Flächen- als Umfangsschwerpunkt desselben und hat von der Achse die Entfernung $a + r$, daher

$$O = 2\pi (a + r) . 2\pi r = 4\pi^2 r (a + r)$$

Ist $a = 0$, so hat der Wulst in seinem Mittelpunkt einen Selbstberührungs- oder Nabelpunkt, dann ist

$$O = 4\pi^2 r^2$$

506. 2. Beispiel. Den Umfangsschwerpunkt eines Halbkreises zu bestimmen.

Dreht sich der Halbkreis um seinen Durchmesser, so erzeugt er die Oberfläche einer Kugel, daher, wenn x der Achsenabstand des gesuchten Punkts, der aus Gründen der Symmetrie auf dem zur Achse senkrechten Halbmesser liegt:

$$2\pi x . \pi r = 4\pi r^2$$

woraus

$$x = \frac{2}{\pi} r$$

507. 3. Beispiel. Berechne die Oberfläche eines Körpers, der durch Umdrehung eines regelmäßigen Vielecks von ungerader Seitenzahl um die von einer Ecke auf die Gegenseite gefällte Höhe h entsteht.

Die Oberfläche des von einem regelmäßigen n-Eck beschriebenen Umdrehungskörpers setzt sich zusammen aus der Mantelfläche eines Kegels, den Mantelflächen von $\frac{n-1}{2} - 1$ Kegelstümpfen und dem von der Grundseite a beschriebenen

Kreis. Sind $h_1, h_2 \ldots h_{\frac{n-1}{2}}$ die Höhen des Kegels und der Kegelstümpfe, so folgt, wenn ϱ und r die Halbmesser des In- und Umkreises des Vielecks sind,

$$\begin{aligned} O &= 2\pi\varrho \,.\, h_1 + 2\pi\varrho \,.\, h_2 + \ldots + 2\pi\varrho \,.\, h_{\frac{n-1}{2}} + \pi \,.\, \frac{a^2}{4} \\ &= 2\pi\varrho\left(h_1 + h_2 + \ldots + h_{\frac{n-1}{2}}\right) + \frac{\pi}{4} a^2 \\ &= 2\pi\varrho h + \pi\frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

nun ist

$$\frac{a^2}{4} = (r + \varrho)(r - \varrho) = h(r - \varrho)$$

somit

$$\begin{aligned} O &= 2\pi\varrho h + \pi h(r - \varrho) \\ &= \pi h(r + \varrho) \\ &= \pi h^2 \end{aligned}$$

d. h.: Alle regelmäßigen Vielecke von ungerader Seitenzahl — Drei-, Fünf-, Siebenecke u. s. f. —, welche dieselbe Höhe h haben, also auch der Kreis über dieser Höhe, erzeugen bei Umdrehung um diese Höhe Körper von gleicher Oberfläche, nämlich von der Fläche eines Kreises, der jene Höhe zum Halbmesser hat.

Prismatoid.

508. Das Prismatoid ist ein ebener Vielflächner, der zwei parallel liegende Vielecke G_m und G_n von beliebiger, im allgemeinen ungleicher Seitenzahl zu Grundflächen hat und seitlich von $m + n$ Dreiecken begrenzt ist, deren jedes mit dem einen Vieleck eine Seite, mit dem anderen eine Ecke gemein hat.

Sind die Grundflächen kongruente reguläre Vielecke, deren Mittelpunkte bezüglich der Grundflächen senkrecht übereinander liegen, und sind dieselben in ihren Ebenen so gegeneinander verdreht, daß durch Verbindung der Ecken im Zickzack kongruente gleichschenklige Dreiecke entstehen, so ist das Prismatoid regulär und heißt Trommel.

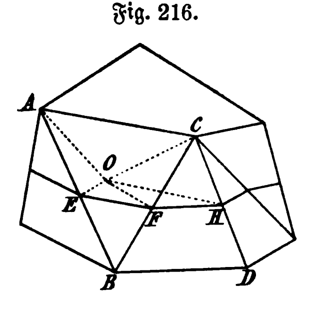
Um welchen Winkel sind die Grundvielecke eines regulären senkrechten n-seitigen Prismas in ihren Ebenen gegeneinander zu drehen, um eine Trommel zu erhalten? Antwort: Um $\frac{360^0}{2n}$.

Es ist möglich, den Rauminhalt des Prismatoids aus seinen Grundflächen G_m und G_n, ihrem Abstand, d. h. der Höhe h des Prismatoids, und dem sogen. Mittelschnitt S, d. i. die Fläche des durch die Parallelebene im mittleren Abstand zu den Grundflächen erzeugten $(m + n)$-Ecks, zu berechnen.

Die Ebenen, welche von einem beliebigen Punkt O des Mittelschnitts aus die Kanten projizieren, zerlegen das Prismatoid in $m + n + 2$ Pyramiden, welche die Grund- und Seitenflächen des Prismatoids zu Grundflächen und Punkt O

zur gemeinsamen Spitze haben. Die Teilpyramiden über den Grundflächen des Prismatoids haben die Höhe $\frac{h}{2}$, ihre Volumina sind daher $\frac{1}{3} G_m \cdot \frac{h}{2}$ und $\frac{1}{3} G_n \cdot \frac{h}{2}$. Die Seitenpyramiden berechnen sich mit Hilfe des Mittelschnitts. Dieser schneidet von jedem seitlichen Dreieck ABC ein diesem ähnliches Dreieck EBF ab, dessen Seiten halb so lang sind, das sich somit nach dem Satz über die Flächen ähnlicher Vielecke zur Seitenfläche verhält wie $1^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Die über dieser Seitenfläche stehende Pyramide O — ABC ist daher viermal so groß als die durch den Mittelschnitt abgetrennte dreiseitige O — EBF, denn beide Pyramiden haben dieselbe Höhe, ihre Inhalte stehen also im Verhältnis der Grundflächen. Diese Betrachtung gilt für jede seitliche Pyramide, daher beträgt auch die Summe aller seitlichen Pyramiden das Vierfache der Summe aller durch den Mittelschnitt von ihnen abgetrennten dreiseitigen Pyramiden. Wählt man als Grundflächen letzterer ihre im Mittelschnitt liegenden Dreiecke, dieselben haben die gemeinschaftliche Ecke O und die Fläche S des Mittelschnitts zur Summe, so ist, da $\frac{h}{2}$ die Höhe sämtlicher $m + n$ dreiseitiger Pyramiden, ihr Rauminhalt $\frac{1}{3} S \cdot \frac{h}{2}$ und somit das Volumen des Prismatoids

Fig. 216.



$$V = \frac{1}{3} G_m \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{3} G_n \cdot \frac{h}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} S \cdot \frac{h}{2}$$

oder

$$V = \frac{G_m + G_n + 4S}{6} \cdot h$$

daher

Satz: Das Prismatoid ist raumgleich sechs Pyramiden, die sämtlich die halbe Höhe des Primatoids zur Höhe haben, zwei dieser Pyramiden haben die Grundflächen des Prismatoids, die übrigen vier den Mittelschnitt desselben zu Grundflächen; oder: Das Prismatoid ist raumgleich einem ebenso hohen Prisma, welches das arithmetische Mittel aus den Grundflächen und dem vierfachen Mittelschnitt des Prismatoids zu Grundflächen hat.

509. Als Prismatoide können betrachtet werden:

1. Das gerade und das schiefe Prisma.

   Ziehe in jeder Seitenfläche eine Diagonale, so entsteht ein Prismatoid, bei welchem je zwei Seitenflächen in eine Ebene fallen.

2. Das schief abgeschnittene dreiseitige Prisma.

   Wähle eine Seitenfläche zur Grundfläche und ziehe in den beiden anderen Trapezseitenflächen je eine Diagonale. Die Deckfläche schrumpft in die zur Grundfläche parallele Kante zusammen.

3. Das schief abgeschnittene vierseitige Prisma.

Zwei parallele Seitenflächen sind als Grundebenen zu nehmen.

4. Das n-seitige schief abgeschnittene Prisma.

Dasselbe wird mit Hilfe von n — 3 Diagonalebenen in n — 2 dreiseitige schief abgeschnittene Prismen zerlegt.

5. Der gerade und der schiefe Cylinder.

Betrachte dieselben als Grenzfall des Prismas.

6. Die Pyramide.

Die Deckfläche ist in einen Punkt zusammengeschrumpft.

Die dreiseitige Pyramide insbesondere kann auch so gestellt werden, daß irgend zwei Gegenkanten, man denke sich die Parallelebenen durch sie gelegt, als Grundflächen genommen werden (krystallographische Stellung).

7. Der Pyramidenstumpf.

Ziehe in den seitlichen Trapezflächen je eine Diagonale.

8. Der Kegel.

Grenzfall der Pyramide.

9. Der Kegelstumpf.

Grenzfall des Pyramidenstumpfs.

10. Der Obelisk.

Ein ebener Vielflächner, umgrenzt oben und unten von zwei n-Ecken, deren entsprechende Seiten parallel sind, als Grundflächen und von n Trapezen als Seitenflächen.

Sind die Grund- und Deckkanten auch noch proportional, so sind die Vielecke ähnlich, die Seitenkanten gehen durch einen Punkt, der Obelisk ist alsdann eine abgestumpfte Pyramide.

Sind entsprechende Grund- und Deckkanten gleich, so wird der Obelisk zum Prisma.

Ein dreiseitiger Obelisk ist stets ein Pyramidenstumpf.

510. Wendet man auf diese Körper zum Zweck der Berechnung ihrer Rauminhalte den für das Prismatoid gefundenen Ausdruck an, so ist z. B. für den Pyramidenstumpf, wenn x die Höhe der Ergänzungspyramide,

$$\sqrt{G} : \sqrt{S} : \sqrt{G'} = (x + h) : \left(x + \frac{1}{2} h\right) : x$$

Da auf der rechten Seite das Mittelglied das arithmetische Mittel der beiden anderen Glieder ist, so muß dies auch links der Fall sein, somit

$$\sqrt{S} = \frac{\sqrt{G} + \sqrt{G'}}{2}$$

und somit

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{G + G'}{2} + \sqrt{G G'}\right)$$

und daher das Volumen des Pyramidenstumpfs

$$V = \frac{h}{6}\left(G + G' + 4 \, . \, \frac{G + G' + 2\sqrt{GG'}}{4}\right)$$

$$= \frac{G + \sqrt{GG'} + G'}{3} \, . \, h \qquad \text{(vergl. 463).}$$

510 a. Sind Inhalt, Grundflächen und Höhen des Prismatoids bekannt, so dient der Ausdruck für V auch vielfach dazu, den Mittelschnitt S zu berechnen.

Die Simpsonschen Körper.*)

511. Sämtliche, bis jetzt betrachteten Körper können, bezüglich der Berechnung ihres Rauminhaltes, einer allgemeineren Gruppe von Körpern zugewiesen werden, welche man die Simpsonschen nennt.

Jeder von zwei beliebigen parallelen Vielecken G_m und G_n als Grundflächen und von ebenen oder gekrümmten Flächen als Seitenflächen umgrenzte Körper, der die Eigenschaft hat, daß die Fläche X eines den Grundflächen parallelen Durchschnitts eine den dritten Grad nicht übersteigende rationale Funktion des Abstands x ist, um welche die Durchschnittsebene von einer Grundebene oder einer beliebigen anderen festen zu dieser parallelen Ebene absteht, heißt ein Simpsonscher Körper.

512. Simpsonsche Körper sind sonach

1. Pyramide, Pyramidenstumpf, Kegel, Kegelstumpf.

   Ist x die Entfernung des zur Grundebene parallelen Durchschnitts X von der Spitze, die in diesem Fall die feste Ebene ersetzt, von der aus die Abstände x zu messen sind, so folgt

   $$\frac{X}{G} = \frac{x^2}{h^2} \quad \text{oder} \quad X = \frac{G}{h^2} \, . \, x^2$$

   also X eine Funktion zweiter Ordnung. Was für die Pyramide gilt, gilt auch für den Unterschied zweier Pyramiden, d. h. den Pyramidenstumpf, und somit auch für Kegel und Kegelstumpf.

2. Der Obelisk.

   Der Beweis für den dreiseitigen fällt unter 1). Beim vierseitigen legt man durch eine der Seitenkanten eine beliebige Ebene bis zum Schnitt mit den beiden nicht anstoßenden Seitenflächen und erweitert die Grundebenen, so erscheint der Obelisk als Unterschied eines größeren und zweier kleinerer dreiseitiger Obelisken, für welche 1) gilt. Jeder n-seitige Obelisk kann als Unterschied eines größeren dreiseitigen und n — 2 kleinerer dreiseitiger Obelisken betrachtet werden.

*) Simpson, Professor der Mathematik zu Woolwich, gestorben 1761.

3. Das Prismatoid.

Der Nachweis 1) gilt auch für die Summe aller Pyramiden, aus denen sich das Prismatoid zusammensetzt.

4. Kugel, Kugelhaube, Kugelschicht, Kugelausschnitt.

Jeder zu einem Großkreis parallele Schnitt im Abstand x liefert einen Kreis, dessen Fläche

$$X = \pi R^2 - \pi x^2$$

eine Funktion zweiter Ordnung ist u. s. f.

Bestimmung des Rauminhalts Simpsonscher Körper.

513. Teilt man die Höhe h eines Simpsonschen Körpers in n, eine beliebige, aber sehr große Anzahl gleicher Teile und legt durch die Teilpunkte Parallelebenen zu den Grundflächen, so wird der Körper in n sehr dünne Scheiben von gleicher Höhe $\frac{h}{n}$ zerschnitten, welche gemäß früher im Grenzfall $n = \infty$ als prismatische Körper betrachtet werden dürfen. Für die im Umfang dieses Buchs in Betracht kommenden Körper genügt es, die Durchschnittsfläche X als Funktion zweiter Ordnung des Abstands x von der festen Grundebene anzunehmen. Es sei also

$$X = a + bx + cx^2$$

Dann sind die Flächen der einzelnen durch die Teilpunkte gelegten Durchschnitte

$$f_1 = a + b \cdot \frac{1}{n} h + c \cdot \frac{1^2}{n^2} \cdot h^2$$

$$f_2 = a + b \cdot \frac{2}{n} h + c \cdot \frac{2^2}{n^2} \cdot h^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n = a + b \cdot \frac{n}{n} h + c \cdot \frac{n^2}{n^2} \cdot h^2$$

somit die Volumina der einzelnen prismatischen Scheiben

$$\frac{1}{n} h \cdot f_1 = a \cdot \frac{1}{n} h + b \cdot \frac{1}{n^2} h^2 + c \cdot \frac{1}{n^3} h^3$$

$$\frac{1}{n} h \cdot f_2 = a \cdot \frac{1}{n} h + b \cdot \frac{2}{n^2} h^2 + c \cdot \frac{2^2}{n^3} h^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n} h \cdot f_n = a \cdot \frac{1}{n} h + b \cdot \frac{n}{n^2} h^2 + c \cdot \frac{n^2}{n^3} h^3$$

Somit das gesuchte Volumen V gleich der Summe aller Scheiben

$$V = ah + b(1 + 2 + 3 + \ldots + n) \frac{h^2}{n^2} + c(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) \frac{h^3}{n^3}$$

Nun erhält man die Summe der n ersten Zahlen durch folgende Ueberlegung: Die Summe des ersten und letzten, des zweiten und vorletzten Gliedes u. s. f. ist unverändert $n + 1$, somit ist, da die n Zahlen $\frac{n}{2}$ mal zu zweien in dieser Weise vereinigt werden können:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

Die Summe der n ersten Quadratzahlen ergiebt sich, wenn man in der kubischen Gleichung (Identität)

$$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

für x, der Reihe nach, die ganzzahligen Werte 1, 2, 3 ... n setzt, dann folgt

$$\begin{aligned} 0^3 &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 \\ 1^3 &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 \\ 2^3 &= 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1)^3 &= n^3 - 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 1 \end{aligned}$$

somit durch Addition der senkrechten Reihen

$$0 = n^3 - 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) - n$$

und hieraus

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 &= \frac{n^3}{3} + (1 + 2 + \ldots + n) - \frac{n}{3} \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Setzt man die Werte für diese arithmetischen Reihen in V ein, so folgt:

$$\begin{aligned} V &= ah + \frac{b}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{n^2} \cdot h^2 + \frac{c}{6} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} h^3 \\ &= ah + \frac{b}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) h^2 + \frac{c}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) h^3 \end{aligned}$$

Wird die Anzahl der prismatischen dünnen Scheiben unendlich groß, also $n = \infty$ und daher $\frac{1}{n} = 0$, so folgt als Grenze das gesuchte Volumen des Simpsonschen Körpers

$$V = ah + \frac{b}{2} h^2 + \frac{c}{3} h^3$$

Zur Ermittelung der drei Größen a, b, c, welche die Durchschnittsflächen

$$X = a + bx + cx^2$$

bestimmen, genügt die Kenntnis dreier Durchschnittsflächen, am einfachsten die Kenntnis der Grundebenen und des Mittelschnitts. Es ist für

$$x = 0 \qquad G_m = a$$
$$x = \frac{h}{2} \qquad S = a + b \cdot \frac{h}{2} + c \cdot \frac{h^2}{4}$$
$$x = h \qquad G_n = a + b \cdot h + c \cdot h^2$$

woraus

$$b = \frac{1}{h}(4S - 3G_m - G_n)$$
$$c = \frac{2}{h^2}(G_m + G_n - 2S)$$

somit

$$V = G_m \cdot h + (4S - 3G_m - G_n)\frac{h}{2} + (G_m + G_n - 2S)\frac{2}{3}h$$

oder

$$V = \frac{G_m + G_n + 4S}{6} h$$

das ist derselbe Ausdruck wie für das Prismatoid, daher

Satz: Die Simpsonschen Körper gelten für die Berechnung ihrer Rauminhalte als Prismatoide.

Berechnung ebener Flächenstücke nach Simpson (Quadratur).

514. Erwähnt sei hier die Giltigkeit der Simpsonschen Formel auch für die Geometrie der Ebene. Verläuft, Fig. 217, eine Kurve so, daß die Abstände y ihrer Punkte von einer festen X-Achse rationale Funktionen ihrer zugehörigen, vom Nullpunkt aus gemessenen x sind, welche den dritten Grad nicht übersteigen, so ist die von X-Achse, Kurve und den zu x_0 und x_1 gehörigen Grenzabständen y_0 und y_1 eingeschlossene Fläche, wenn y_2 die im mittleren Abstand $e = \frac{x_1 - x_0}{2}$ zu den Grenzabständen gezogene Parallelstrecke ist

$$f = \frac{y_0 + 4y_2 + y_1}{6}(x_1 - x_0)$$

Beweis wie oben: Die Fläche setzt sich zusammen aus unendlich vielen, unendlich schmalen Rechtecken von der Breite $\frac{x_1 - x_0}{n}$ für $n = \infty$.

Verläuft die Kurve nach irgend welchem anderen Gesetz, so teile man die zwischen den Grenzpunkten (x_{2n}, y_{2n}) und (x_0, y_0) liegende Strecke der X-Achse in 2n, eine möglichst große Anzahl gleiche Teile und messe die diesen Teilpunkten zugehörigen y, dann können, da die bezeichneten Kurvenpunkte in nächster Nähe liegen, je drei sich folgende, ohne zu großen Fehler, als solche betrachtet werden, welche mit sämtlichen, zwischen ihnen liegenden Kurvenpunkten solche Abstände y besitzen, die der obigen Funktionsbedingung genügen. Die von y_{2n} und y_0, Kurve und X-Achse eingeschlossene Fläche F ist somit, da der Abstand, in welchem sich die Teilpunkte der X-Achse folgen, $e = \frac{x_{2n} - x_0}{2n}$ ist, mit um so größerer Annäherung, je größer die Anzahl der Teile gewählt wird:

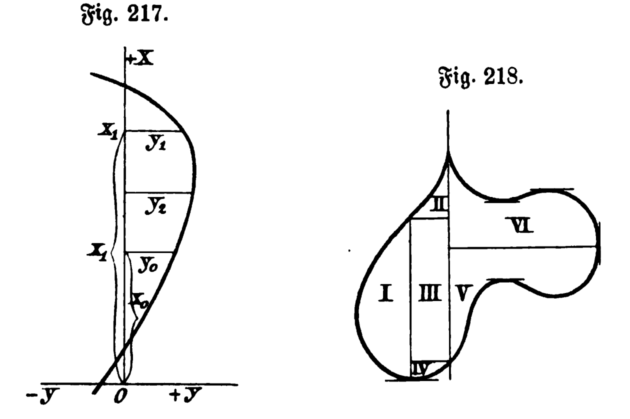
$$F = \frac{x_{2n} - x_0}{6n} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})]$$

$$= \frac{x_{2n} - x_0}{6n} [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})]$$

Hiernach läßt sich die Fläche jedes von einer beliebigen Kurve umschlossenen Teils der Ebene mit großer Annäherung berechnen. Man hat die Fläche nur

Fig. 217.

Fig. 218.



durch zweckmäßig gewählte Parallelgeraden in Streifen zu zerlegen und auf diese die Simpsonsche Formel anzuwenden. Fig. 218.

Beispiele.

515. 1. Beispiel. Berechne den Rauminhalt eines Fasses, dessen Grundflächen kongruente Kreise vom lichten Durchmesser d sind, wenn D die Spundentiefe, d. h. der lichte Durchmesser des Mittelschnitts, und h die Höhe bezw. Länge des Fasses ist, vorausgesetzt, daß das Faß zu den Simpsonschen Körpern gehört.

Es ist

$$V = \frac{h}{6}\left(\frac{\pi d^2}{4} + \frac{\pi d^2}{4} + 4 \cdot \frac{\pi D^2}{4}\right) = \frac{\pi}{12}(d^2 + 2D^2)h$$

516. 2. Beispiel: Berechne den Rauminhalt eines schiefabgeschnittenen Prismas bezw. Cylinders.

Man geht aus vom einfachsten Prisma, dem dreiseitigen, und betrachtet dieses als Prismatoid, das eine Seitenfläche des Prismas, das Trapez mit den Parallelseiten a und b, deren Abstand e sei, zur Grundfläche hat, während die Deckfläche zur Parallelkante c zusammenschrumpft. Der Mittelschnitt ist ebenfalls ein Trapez mit den Parallelseiten $\frac{a+c}{2}$ und $\frac{b+c}{2}$, deren Abstand $\frac{e}{2}$ be-

trägt, daher, wenn h der Abstand der Kante c von der Grundebene ist, gesuchtes Volumen

$$V = \left(\frac{a+b}{2} \cdot e + 0 + 4 \cdot \frac{\frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} \cdot \frac{e}{2}\right)\frac{h}{6}$$

$$= (a+b+c)\frac{eh}{6}$$

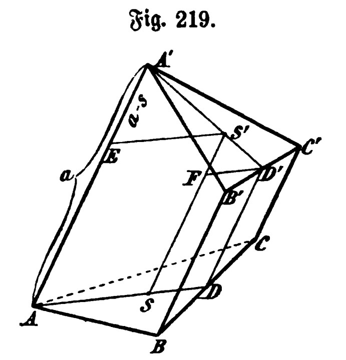


Fig. 219.

oder, da eine zu den Parallelkanten senkrechte Ebene den Querschnitt Q erzeugt, ein Dreieck, das die Grundseite e und die Höhe h, also die Fläche $\frac{e \cdot h}{2}$ hat,

$$V = (a+b+c)\frac{Q}{3} = \frac{a+b+c}{3} \cdot Q$$

Wie in 494) berechnet sich der Abstand s des Schwerpunkts der Deckfläche von seiner Parallelprojektion, dem Schwerpunkt der Grundfläche (Fig. 219) aus

$$\frac{a-s}{s-\frac{b+c}{2}} = \frac{2}{1} \quad \text{zu} \quad s = \frac{a+b+c}{3}$$

somit

Satz: Das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma ist raumgleich einem über dem Querschnitt errichteten senkrechten Prisma, dessen Höhe die den Seitenkanten parallele Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der schiefen Endflächen ist.

516a. Da jedes schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma durch den an beliebiger Stelle geführten Querschnitt in zwei senkrechte, schiefabgeschnittene dreiseitige Prismen zerlegt wird, so führt auch die Berechnung letzterer zum Ziel. Diese erfolgt entweder 1. indem man das senkrechte schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma als Prismatoid betrachtet, oder 2. dadurch, daß man durch den oberen Endpunkt der kleinsten Seitenkante eine Parallelebene zur Grundfläche legt, wodurch das Prisma in ein senkrechtes dreiseitiges Prisma und eine vierseitige Pyramide zerlegt wird.

516b. Führt man die Betrachtungen 516) für das schiefabgeschnittene vierseitige Prisma aus, dessen Querschnitt ein Parallelogramm mit der Grundseite e und der Höhe h ist, so folgt, wenn a, b, c, d die Seitenkanten sind,

$$V = \left(\frac{a+b}{2} \cdot e + \frac{c+d}{2} \cdot e + 4 \cdot \frac{\frac{a+d}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} \cdot e\right)\frac{h}{6}$$

$$= \frac{a+b+c+d}{4} \cdot eh = \frac{a+b+c+d}{4} \cdot Q$$

516c. Eine andere Lösung liefert die Betrachtung 516a). Zerlegt man das schiefe vierseitige Prisma mittels einer Diagonalebene in zwei schiefe dreiseitige Prismen mit den Querschnitten Q_1 und Q_2 und den Schwerpunktsabständen s_1 und s_2 der zugeordneten Dreiecksgrundflächen i_1 und k_1 bezw. i_2 und k_2, in welche die Endflächen J und K des vierseitigen Prismas gespalten werden, so ist

$$V = Q_1 \cdot s_1 + Q_2 \cdot s_2$$

Nun teilt der Schwerpunkt S des Vierecks J die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte S_1 und S_2 der Dreiecke i_1 und i_2 im Verhältnis

$$S S_1 : S S_2 = i_2 : i_1$$

Daher ergiebt sich der Abstand s der Schwerpunkte von J und K aus

$$\frac{s_1 - s}{s - s_2} = \frac{i_2}{i_1}$$

Nach den Gesetzen der Parallelperspektive stehen aber die Projektionen zweier Flächenstücke im gleichen Verhältnis wie diese Flächenstücke selbst, denn gemäß 76) ist, wenn φ der Winkel der Ebenen J und Q_1,

$$Q_1 = \cos\varphi \cdot i_1 \qquad Q_2 = \cos\varphi \cdot i_2 \qquad \text{somit} \qquad \frac{i_1}{i_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$$

und daher

$$\frac{s_1 - s}{s - s_2} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

woraus

$$Q_1 s_1 + Q_2 s_2 = (Q_1 + Q_2)\, s$$

oder

$$V = Q \cdot s$$

d. h.

Satz: Der Rauminhalt des schiefabgeschnittenen vierseitigen Prismas ist gleich demjenigen eines senkrechten, das den Querschnitt zur Grundfläche und die den Seitenkanten parallele Verbindungsstrecke der Schwerpunkte beider Endflächen zur Höhe hat.

516d. Die Vergleichung der Ergebnisse 516b) und 516c) liefert

$$s = \frac{a + b + c + d}{4}$$

d. h. die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte beider Endflächen des schiefabgeschnittenen vierseitigen Prismas ist das arithmetische Mittel aus den vier Seitenkanten.

Wie lautet der Satz für das n-seitige Prisma?

516e. Führt man die Betrachtung 516c) für das n-seitige Prisma durch, indem man dasselbe von einer Seitenkante aus in n — 2 dreiseitige Prismen zerlegt, so folgt allgemein

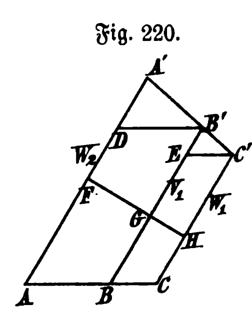
Satz: Der Rauminhalt eines beliebigen schiefabgeschnittenen Prismas oder Cylinders ist gleich demjenigen eines über dem Querschnitt errichteten senkrechten

Prismas bezw. Cylinders, dessen Höhe die den Seitenlinien parallele Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der beiden Endflächen ist, also Produkt aus Querschnitt und Abstand der Flächenschwerpunkte der Endflächen.

517. Ein ähnlicher Satz besteht für die Seitenfläche **M** des schiefabgeschnittenen Prismas bezw. Cylinders. Erstere setzt sich zusammen aus n Trapezen, welche die Schnittgeraden $h_1, h_2, h_3 \ldots$ mit dem Querschnitt Q zu Höhen haben. Sind $w_1, w_2, w_3 \ldots$ die Mittellinien, so ist

$$M = w_1 h_1 + w_2 h_2 + w_3 h_3 + \ldots + w_n \cdot h_n$$

Fig. 220.



Bestimmt man in der Ebene des Querschnitts den Schwerpunkt der Höhen h_1 und h_2, indem man die Verbindungsstrecke ihrer Mitten im Verhältnis $h_2 : h_1$ teilt (vergl. 503B), und zieht durch den Teilpunkt die Parallelstrecke v_1 zu den Seitenkanten bis zum Schnitt mit den schiefen Endflächen des Prismas, so ist nach 503B):

$$\frac{v_1 - w_1}{w_2 - v_1} = \frac{h_2}{h_1} \quad \text{woraus}$$

$$w_1 h_1 + w_2 h_2 = v_1 (h_1 + h_2)$$

Dehnt man diese Betrachtung auf das von den Parallelseiten w_3 und v_1 gebildete Trapez aus, indem man die Verbindungsstrecke der Mitte von h_3 und des Schwerpunkts von $h_1 + h_2$ im Verhältnis $(h_1 + h_2) : h_3$ teilt, und wieder die Parallelstrecke v_2 zu den Seitenkanten zieht, so folgt

$$w_1 h_1 + w_2 h_2 + w_3 h_3 = v_2 (h_1 + h_2 + h_3)$$

und schließlich für das letzte von den Parallelseiten v_{n-1} und w_n gebildete Trapez

$$w_1 h_1 + w_2 h_2 + \ldots + w_n h_n = v_n (h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n)$$

oder

$$M = v_n \cdot U$$

d. h.

Satz: Die Seitenfläche eines schiefabgeschnittenen Prismas bezw. Cylinders ist gleich derjenigen eines über dem Querschnitt errichteten senkrechten Prismas bezw. Cylinders, dessen Höhe die von den Endflächen begrenzte, im Umfangsschwerpunkt des Querschnitts errichtete Senkrechte ist, also Produkt aus Umfang des Querschnitts und jener im Umfangsschwerpunkt errichteten Senkrechten.

518. 3. Beispiel: Rauminhalt des Prismatoids, in anderen Bestimmungsstücken berechnet.

Projiziert man die seitlichen Dreiecke eines Prismatoids auf die Grundfläche G, so ist, wenn O bezw. U die algebraische Summe der Projektionen der Dreiecke, welche mit der Deckfläche D bezw. Grundfläche G eine Seite gemein haben (Ober-, Unterdreiecke),

$$G = D + O + U$$

und da von jedem Oberdreieck Δ der Trapezteil $\frac{3}{4}\Delta$, von jedem Unterdreieck Δ'

der, der Spitze zu gelegene Teil $\frac{1}{4}\,\Delta'$ sich in den Mittelschnitt projiziert, so folgt

$$S = D + \frac{3}{4}\,O + \frac{1}{4}\,U$$

und somit das Volumen des Prismatoids

$$\begin{aligned} V &= (G_m + G_n + 4\,S)\,\frac{h}{6} \\ &= \left[(D + O + U) + D + 4\left(D + \frac{3}{4}\,O + \frac{1}{4}\,U\right)\right]\frac{h}{6} \\ &= (3\,D + 2\,O + U)\,\frac{h}{3} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad 1) \end{aligned}$$

Führt man nicht im mittleren Abstand, sondern in der Entfernung $\frac{2}{3}\,h$ von der Grundfläche einen Durchschnitt T, so ist, da die Projektionen der seitlichen Oberdreiecke wie diese selbst im Verhältnis $\frac{4}{9} : \frac{5}{9}$, die Unterdreiecke wie $\frac{1}{9} : \frac{8}{9}$ geteilt werden,

$$T = D + \frac{5}{9}\,O + \frac{1}{9}\,U \quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad 2)$$

$$T = G - \frac{4}{9}\,O - \frac{8}{9}\,U \quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad 3)$$

woraus zur Probe

$$0 = D - G + O + U$$

aus 2) und 3) folgen die Werte

$$O = \frac{9}{4}\,T - 2\,D - \frac{1}{4}\,G$$

$$U = -\frac{9}{4}\,T + D + \frac{5}{4}\,G$$

daher

$$\begin{aligned} V &= \left[3\,D + 2\left(\frac{9}{4}\,T - 2\,D - \frac{1}{4}\,G\right) - \frac{9}{4}\,T + D + \frac{5}{4}\,G\right]\frac{h}{3} \\ &= G \,.\, \frac{h}{4} + T \,.\, \frac{3}{4}\,h \end{aligned}$$

oder
$$V = \frac{G + 3\,T}{4}\,.\,h$$

ein insofern einfacherer Ausdruck denn der frühere, als nur zwei Flächen zu messen sind. In Worten:

Das Prismatoid ist raumgleich der Summe zweier Prismen, das eine über der einen Grundfläche des Prismatoids stehend und von ein Viertel der Höhe desselben, das andere über dem in zwei Drittel der Höhe geführten parallelen Durchschnitt errichtet und von drei Viertel der Höhe des Prismatoids.

519. 4. Beispiel. Berechne das Volumen eines Rotationsellipsoids.

Dasselbe ist als Simpsonscher Körper zu betrachten, dessen Grundflächen $G_m = G_n = 0$, dessen Höhe $h = 2\,b$ bezw. $h = 2\,a$ ist, je nachdem die b-Achse bezw. a-Achse der erzeugenden Ellipse Drehachse ist. Somit

$$V_b = \frac{2b}{6} \cdot 4\pi a^2 = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

$$V_a = \frac{2a}{6} \cdot 4\pi b^2 = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

Es verhalten sich also die Volumina beider Ellipsoide:

$$V_b : V_a = a : b$$

520. 5. Beispiel. Berechne das Volumen des dreiachsigen Ellipsoids.

Drei zu einander senkrechte, sich gegenseitig halbierende Strecken $2c > 2b > 2a$ seien die Achsen dreier Ellipsen, deren Ebenen somit senkrecht aufeinander stehen. (Fig. 179). Man wähle die Ebene (ab) einer dieser sogen. Grundellipsen wagrecht und zeichne in jeder zu ihr parallelen Ebene Σ aus den beiden zu einander senkrechten und sich gegenseitig halbierenden Sehnen $2u$ und $2v$, nach welchen Σ die beiden anderen Grundellipsen (ac) und (bc) schneidet, als Achsen eine Ellipse, so erfüllen die unendlich vielen, derart erzeugten Ellipsen die Fläche eines dreiachsigen Ellipsoids, das für $a = b$ in das zweiachsige oder Rotationsellipsoid und für $a = b = c$ in die Kugel übergeht.

Alle zur Ebene einer Grundellipse parallelen Ebenen schneiden das dreiachsige Ellipsoid nach Ellipsen, die dieser Grundellipse ähnlich sind, denn denkt man sich in den Grundebenen (ac) und (bc) um den Mittelpunkt O des Ellipsoids den Kreis mit c beschreiben, so erhält man durch Verlängerung von u und v dieselbe Kreissehne q und es ist gemäß der Eigenschaft 273) bezw. 275) der Ellipse:

$$\frac{u}{q} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{v}{q} = \frac{b}{c}$$

somit

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b}$$

Schnittellipse und Grundellipse haben also proportionale Achsen, solche Ellipsen heißen ähnlich.

Läßt man die Grundellipse (ac) um die c-Achse rotieren, so erzeugt sie ein Rotationsellipsoid, dessen Volumen mit demjenigen des dreiachsigen verglichen werden kann. Jede zur Grundebene (ab) parallele Ebene Σ schneidet das Rotationsellipsoid nach einem Kreis, das dreiachsige Ellipsoid nach einer Ellipse. Diese Durchschnittsflächen haben ein unveränderliches Verhältnis, es ist

$$\pi u^2 : \pi u v = u : v = a : b$$

Offenbar kann der Satz des Cavalieri dahin abgeändert werden, daß, wenn die Parallelebenen zu der gemeinsamen Grundebene, auf der die ihrem Inhalt nach zu vergleichenden Körper aufruhen, Durchschnittsflächen f_1 und f_2 erzeugen, von welchen die eine stets denselben Bruchteil k der anderen beträgt,

$$f_1 = k \cdot f_2$$

dann auch das Volumen des ersten Körpers denselben Bruchteil k des Volumens des zweiten betragen muß:

$$V_1 = k \cdot V_2$$

Gleichheit der Körper für $k = 1$.

Dreiachsiges und Rotationsellipsoid stehen somit im selben Verhältnis wie ihre Schnittflächen, d. h.

$$\frac{V}{\frac{4}{3} \pi a^2 c} = \frac{b}{a}$$

woraus das Volumen des dreiachsigen Ellipsoids

$$V = \frac{4}{3} \pi a b c$$

Für $a = b = c = R$ erhält man die Kugel $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Das dreiachsige Ellipsoid kann nicht als Simpsonscher Körper betrachtet werden, da die Flächen der den Grundellipsen parallelen und ähnlichen Schnittellipsen sich als irrationale Funktionen (Funktionen mit Wurzelgrößen) des Abstands ihrer Ebenen von der bezüglichen Grundebene darstellen.

521. 6. Beispiel. Berechne das Volumen eines Rotationsparaboloids vom Grundkreishalbmesser r und der Höhe h.

Ist ϱ der Halbmesser des Mittelschnitts in der Höhe $\frac{h}{2}$, so ist, da gemäß 338) zwischen dem Abstand x jedes Parabelpunkts von der Achse und dem Abstand y von der Scheiteltangente das unveränderliche Verhältnis $\frac{x^2}{y}$ besteht, für die Parabelpunkte (r, h) und $\left(\varrho, \frac{h}{2}\right)$

$$\frac{r^2}{h} = \frac{\varrho^2}{\frac{1}{2} h}$$

woraus

$$\varrho^2 = \frac{1}{2} r^2$$

und somit, da gemäß der eben ausgesprochenen Eigenschaft das Umdrehungsparaboloid als Simpsonscher Körper anzusehen ist, das Volumen desselben

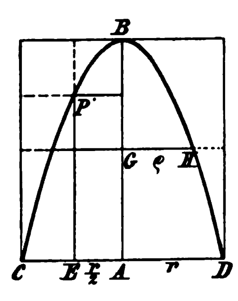
$$V = \frac{h}{6} \left(\pi r^2 + 0 + 4 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} r^2\right)$$
$$= \frac{1}{2} \pi r^2 h$$

d. h. der Rauminhalt eines Rotationsparaboloids beträgt die Hälfte des über seiner Grundfläche stehenden, gleichhohen senkrechten Kreiscylinders.

Bestimmt man auch noch das Volumen des Umdrehungskörpers, der entsteht, wenn die erzeugende Parabel um ihre Halbsehne r sich dreht, und gelingt

es, die Größe des erzeugenden parabolischen Flächenstücks zu ermitteln, so ergiebt sich aus dem Guldinschen Satz die Lage des Schwerpunkts dieser Fläche und damit auch des ganzen Achsenschnitts des Paraboloids.

Fig. 221.



Der zu $x = \frac{1}{2} r$ gehörige Parabelpunkt habe von der Halbsehne r den Abstand z, dann ist nach der Simpsonschen Regel die erzeugende Fläche

$$F = r \cdot \frac{h + 4z}{6}$$

wobei z sich berechnet aus

$$\frac{r^2}{h} = \frac{\frac{r^2}{4}}{h - z}$$

zu

$$z = \frac{3}{4} h$$

und somit

$$F = \frac{2}{3} rh$$

d. h. der Parabelbogen, der, von einer Ecke B eines Rechtecks (r . h) zur Gegenecke D führend, die eine der in dieser Ecke zusammenstoßenden Rechteckseiten zur Achse, die andere zur Scheiteltangente hat, teilt die Fläche des Rechtecks im Verhältnis 1 : 2.

Sind somit s und s' die Abstände des gesuchten Schwerpunkts des erzeugenden parabolischen Flächenstücks von h und r, so folgt bei Drehung um h als Achse

$$2\pi s \cdot \frac{2}{3} rh = \frac{1}{2} \pi r^2 h$$

r als Achse

$$2\pi s' \cdot \frac{2}{3} rh = \frac{r}{6} \left[\pi h^2 + 4 \cdot \pi \left(\frac{3}{4} h\right)^2\right]$$

woraus

$$s = \frac{3}{8} r$$

und

$$s' = \frac{13}{32} h$$

522. 7. Beispiel. Berechnung des Rauminhalts der Kugelhaube und Kugelschichte nach der Simpsonschen Regel.

Ist ϱ der Halbmesser des in der halben Höhe $\frac{h}{2}$ geführten Mittelschnitts, so ist das Volumen der Haube

$$V = \frac{h}{6} (\pi r^2 + 4\pi\varrho^2) = \frac{\pi}{6} h (r^2 + 4\varrho^2)$$

nun ist

$$r^2 = h\,(2R - h)$$
$$\varrho^2 = \frac{h}{2}\left(2R - \frac{h}{2}\right)$$

woraus, durch Elimination von 2R, folgt

$$r^2 = 2\,\varrho^2 - \frac{h^2}{2}$$

und somit

$$V = \frac{\pi}{2}\,h\left(2\,\varrho^2 - \frac{h^2}{2} + 4\,\varrho^2\right)$$
$$= \pi h\left(\varrho^2 - \frac{h^2}{12}\right)$$

Da die Haube als Kugelschicht betrachtet werden kann, deren eine Grundfläche zum Punkt zusammengeschrumpft ist, und obiger Ausdruck nur vom Halbmesser ϱ des Mittelschnitts und der Höhe abhängt, so gilt er auch für die Kugelschicht.

Berechnet man die Kugelschicht nach der Simpsonschen Regel, so folgt, wenn x die Höhe der über dem kleineren Grundkreis vom Halbmesser r' stehenden Haube ist

$$V = \frac{h}{6}\,(\pi r^2 + \pi r'^2 + 4\,\pi\,\varrho^2)$$
$$= \frac{\pi}{6}\,h\,(r^2 + r'^2 + 4\,\varrho^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

wobei

$$r'^2 = x\,(2R - x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$
$$r^2 = (x + h)\,[2R - (x + h)] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$
$$\varrho^2 = \left(x + \frac{h}{2}\right)\left[2R - \left(x + \frac{h}{2}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Setzt man aus 4) den Wert

$$2R = \frac{\varrho^2}{x + \frac{h}{2}} + \left(x + \frac{h}{2}\right)$$

in 2) und 3) ein und addiert, so folgt

$$r^2 + r'^2 = 2\,\varrho^2 - \frac{h^2}{2}$$

und somit

$$V = \frac{\pi}{6}\,h\left(2\,\varrho^2 - \frac{h^2}{2} + 4\,\varrho^2\right)$$

also thatsächlich, wie bei der Haube,

$$V = \pi h\left(\varrho^2 - \frac{h^2}{12}\right)$$

Wie für die gekrümmte Fläche, so besteht hiermit auch für das Volumen ein Kugelhaube und Kugelschicht gemeinsamer Ausdruck. Da derselbe vom Kugelhalbmesser R unabhängig ist, so folgt

trägt, daher, wenn h der Abstand der Kante c von der Grundebene ist, gesuchtes Volumen

$$V = \left(\frac{a+b}{2} \cdot e + 0 + 4 \cdot \frac{\frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} \cdot \frac{e}{2}\right) \frac{h}{6}$$

$$= (a+b+c) \frac{eh}{6}$$

oder, da eine zu den Parallelkanten senkrechte Ebene den Querschnitt Q erzeugt, ein Dreieck, das die Grundseite e und die Höhe h, also die Fläche $\frac{e \cdot h}{2}$ hat,

$$V = (a+b+c) \frac{Q}{3} = \frac{a+b+c}{3} \cdot Q$$

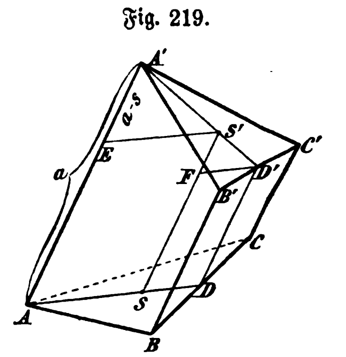


Fig. 219.

Wie in 494) berechnet sich der Abstand s des Schwerpunkts der Deckfläche von seiner Parallelprojektion, dem Schwerpunkt der Grundfläche (Fig. 219) aus

$$\frac{a - s}{s - \frac{b+c}{2}} = \frac{2}{1} \quad \text{zu} \quad s = \frac{a+b+c}{3}$$

somit

Satz: Das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma ist raumgleich einem über dem Querschnitt errichteten senkrechten Prisma, dessen Höhe die den Seitenkanten parallele Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der schiefen Endflächen ist.

516a. Da jedes schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma durch den an beliebiger Stelle geführten Querschnitt in zwei senkrechte, schiefabgeschnittene dreiseitige Prismen zerlegt wird, so führt auch die Berechnung letzterer zum Ziel. Diese erfolgt entweder 1. indem man das senkrechte schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma als Prismatoid betrachtet, oder 2. dadurch, daß man durch den oberen Endpunkt der kleinsten Seitenkante eine Parallelebene zur Grundfläche legt, wodurch das Prisma in ein senkrechtes dreiseitiges Prisma und eine vierseitige Pyramide zerlegt wird.

516b. Führt man die Betrachtungen 516) für das schiefabgeschnittene vierseitige Prisma aus, dessen Querschnitt ein Parallelogramm mit der Grundseite e und der Höhe h ist, so folgt, wenn a, b, c, d die Seitenkanten sind,

$$V = \left(\frac{a+b}{2} \cdot e + \frac{c+d}{2} \cdot e + 4 \cdot \frac{\frac{a+d}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} \cdot e\right) \frac{h}{6}$$

$$= \frac{a+b+c+d}{4} \cdot eh = \frac{a+b+c+d}{4} \cdot Q$$

516c. Eine andere Lösung liefert die Betrachtung 516a). Zerlegt man das schiefe vierseitige Prisma mittels einer Diagonalebene in zwei schiefe dreiseitige Prismen mit den Querschnitten Q_1 und Q_2 und den Schwerpunktsabständen s_1 und s_2 der zugeordneten Dreiecksgrundflächen i_1 und k_1 bezw. i_2 und k_2, in welche die Endflächen J und K des vierseitigen Prismas gespalten werden, so ist

$$V = Q_1 \cdot s_1 + Q_2 \cdot s_2$$

Nun teilt der Schwerpunkt S des Vierecks J die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte S_1 und S_2 der Dreiecke i_1 und i_2 im Verhältnis

$$S S_1 : S S_2 = i_2 : i_1$$

Daher ergiebt sich der Abstand s der Schwerpunkte von J und K aus

$$\frac{s_1 - s}{s - s_2} = \frac{i_2}{i_1}$$

Nach den Gesetzen der Parallelperspektive stehen aber die Projektionen zweier Flächenstücke im gleichen Verhältnis wie diese Flächenstücke selbst, denn gemäß 76) ist, wenn φ der Winkel der Ebenen J und Q_1,

$$Q_1 = \cos\varphi \cdot i_1 \qquad Q_2 = \cos\varphi \cdot i_2 \qquad \text{somit} \qquad \frac{i_1}{i_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$$

und daher

$$\frac{s_1 - s}{s - s_2} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

woraus

$$Q_1 s_1 + Q_2 s_2 = (Q_1 + Q_2)\, s$$

oder

$$V = Q \cdot s$$

d. h.

Satz: Der Rauminhalt des schiefabgeschnittenen vierseitigen Prismas ist gleich demjenigen eines senkrechten, das den Querschnitt zur Grundfläche und die den Seitenkanten parallele Verbindungsstrecke der Schwerpunkte beider Endflächen zur Höhe hat.

516d. Die Vergleichung der Ergebnisse 516b) und 516c) liefert

$$s = \frac{a + b + c + d}{4}$$

d. h. die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte beider Endflächen des schiefabgeschnittenen vierseitigen Prismas ist das arithmetische Mittel aus den vier Seitenkanten.

Wie lautet der Satz für das n-seitige Prisma?

516e. Führt man die Betrachtung 516c) für das n-seitige Prisma durch, indem man dasselbe von einer Seitenkante aus in n — 2 dreiseitige Prismen zerlegt, so folgt allgemein

Satz: Der Rauminhalt eines beliebigen schiefabgeschnittenen Prismas oder Cylinders ist gleich demjenigen eines über dem Querschnitt errichteten senkrechten

des von Grundkreis und seitlicher Ellipse als Grundflächen begrenzten, schief-abgeschnittenen Cylinders von der Höhe 2h, wenn der eben berechnete Huf durch seinen Scheitelhuf ersetzt wird, entsprechend gleich dem Volumen bezw. Mantel des über dem Grundkreis stehenden vollen Cylinders von der halben Höhe h, also

$$V = \pi r^2 . h$$
$$M = 2\pi r . h$$

524. Aufgaben über Körperberechnungen:

1. Ein Würfel aus Gußeisen (Dichte s) wiegt P kg. Wie viele qcm beträgt seine Oberfläche?
2. Ein Würfel aus Blei (Dichte s) hat die Kante a cm. Wie tief sinkt ein gleichschwerer Würfel aus Buchenholz (Dichte s′) im Meerwasser (Dichte s″) ein?
3. Die Oberfläche eines Würfels beträgt O qm. Gesucht die Diagonale.
4. Die Diagonalebene eines Würfels beträgt D qcm. Gesucht Volumen und Oberfläche des Würfels.
5. Die Mitte von sechs aufeinander folgenden Würfelkanten so verbunden, daß keine drei sich folgenden Punkte in einer Seitenfläche liegen, entsteht ein regelmäßiges Sechseck. Vergleiche die Fläche desselben mit der Fläche der Diagonalebene des Würfels, wenn die Würfelkante a cm beträgt.
6. Ein allseitig geschlossener, hohler Würfel aus Blech (Dichte s), dessen äußere Kante a cm ist, schwimmt auf Wasser. Die Wandstärke ist überall d mm. Wie tief sinkt der Würfel ein?
7. Ein oben offener Blechkasten von der Gestalt eines Quaders mit quadratischer Grundfläche soll im Wasser gerade zur Hälfte einsinken. Wie hoch muß der Kasten gemacht werden, wenn die äußere Grundkante a cm, die Wandstärke d mm und die Dichte des Blechs s ist?
8. Wieviel Backsteine von der Länge l cm, Breite m cm und Dicke n cm braucht man zum Bau eines quadratischen Turms, dessen Breite b m, Höhe h m und Mauerdicke d cm werden soll?
9. Von einem Eckpunkt der Grundfläche aus ein gerades quadratisches Prisma durch eine Ebene so zu schneiden, daß der Durchschnitt ein Rhombus werde, dessen Fläche das Doppelte der Grundfläche ist.
10. Die Oberfläche eines Quaders beträgt O qm und seine Ausdehnungen verhalten sich wie a : b : c. Gesucht das Volumen.
11. Durch eine Grundkante eines Würfels ist, unter dem Winkel α (60°) gegen eine Fläche desselben, ein ebener Schnitt gelegt. Wie groß ist das Volumen des abgeschnittenen Körpers?
12. Der Schnittpunkt der vier Diagonalen eines Parallelflachs ist der Mittelpunkt desselben, d. h. jede Strecke durch diesen Punkt, innerhalb des Körpers, wird in ihm halbiert.

13. Ein gerades quadratisches Prisma durch eine Ebene, welche durch eine Grundkante a cm geht, so zu schneiden, daß der Durchschnitt dreimal so groß werde wie die Grundfläche. Berechne die Oberfläche des abgeschnittenen Körpers.
14. Die Summe der Quadrate über den vier Diagonalen eines Parallelflachs ist gleich der vierfachen Summe der Quadrate über drei zusammenstoßenden Kanten.
15. Die Oberfläche eines geraden dreiseitigen Prismas mit lauter gleichen Kanten beträgt O qcm. Gesucht das Volumen.
16. In einem geraden Prisma, dessen Grundflächen Rhomben sind, sind die Flächen der Diagonalebenen F_1 und F_2 und die Seitenkante ist gleich dem Durchmesser des Inkreises der Grundfläche. Gesucht das Volumen.
17. In einem schiefen Prisma, dessen Grundflächen gleichseitige Dreiecke mit der Seite a cm, dessen Seitenflächen Rhomben sind, ist die Seitenkante um 60° gegen die Grundflächen geneigt. Gesucht die Kante eines Würfels von gleichem Volumen.
18. Ueber der durch Grundseite a und Höhe h gegebenen Grundfläche ABC eines geraden dreiseitigen Prismas einen dem Prisma einbeschriebenen Quader von größtem Rauminhalt so zu errichten, daß eine Grundkante in AB zu liegen kommt.
19. Für die Anfertigung von Kisten von der Gestalt eines Quaders, deren Rauminhalt K cbm betragen soll, wird für die Bearbeitung je zweier gegenüberliegender Flächen bezüglich a *M*, b *M*, c *M* ausgesetzt. Wie sind die Dimensionen der Kisten zu wählen, damit die Herstellungskosten möglichst niedrig werden. (Benütze 434.)
20. Gesucht der Inhalt eines regelmäßigen zehnseitigen Prismas, dessen quadratische Seitenflächen je F qm groß sind.
21. Gesucht das Gewicht einer gußeisernen hohlen Säule (Dichte s) von der Gestalt eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas, wenn die Höhe h m, eine äußere Grundkante a cm und die Dicke d mm betragen soll.
22. Ein Dachsparren aus Tannenholz (Dichte s), dessen Querschnitt ein Quadrat von der Seite a cm ist, ist an beiden Enden so abgeschrägt, daß die Endflächen kongruente Rechtecke und zwei gegenüberliegende Seitenflächen gleichschenklige Trapeze sind mit spitzem Winkel 45° und der längeren Parallelseite a m. Gesucht das Gewicht.
23. Ein cylindrisches Litergefäß soll noch einmal so breit als hoch sein. Gesucht seine lichte Weite.
24. Gegeben Volumen K Liter und Höhe h cm eines geraden Cylinders. Gesucht seine Oberfläche.
25. Wie verhält sich der Halbmesser eines geraden Cylinders zu seiner Höhe, damit der Achsenschnitt dem Grundkreis flächengleich wird?
26. Aus einem Rechteck mit den Seiten a cm und b cm wird ein gerader Cylinder von der Höhe b cm (durch Zusammenkrümmen) gebildet. Wie viel Liter hält derselbe?

27. Aus einem cylindrischen Baumstamm von der Dicke 2 r cm und Länge h m wird der möglich größte quadratische Balken geschnitten. Was wiegt der Holzabfall (Dichte s)?

28. Wie verhält sich in einem quadratischen Cylinder der Mantel zur Grundfläche?

29. In einem geraden Cylinder vom Halbmesser r ist ein zur Achse paralleler Schnitt gelegt, der $\frac{1}{m}$ des Achsenschnitts beträgt. In welchem Verhältnis wird der Rauminhalt des Cylinders geteilt? $m = 3$.

30. Ein quadratischer Cylinder wird in einen anderen Cylinder verwandelt, dessen Höhe halb so groß ist. Wie verhalten sich die Oberflächen beider Cylinder?

31. Eine Röhre aus Kupfer (spezifisches Gewicht s) ist a m lang und wiegt p kg; ihr äußerer Durchmesser beträgt d cm. Wie dick ist die Röhre und wieviel Liter Wasser kann sie aufnehmen?

32. Um eine dünne cylindrische Glasröhre (Thermometerröhre) auf ihr Kaliber zu untersuchen, bringt man eine kleine p g schwere Menge Quecksilber (Dichte s) in dieselbe und verschiebt den sich bildenden Faden an die verschiedensten Stellen der Röhre. Wie groß ist das Kaliber derselben, wenn der Faden überall die Länge a mm hat?

33. Aus einer dünnen Silberplatte von Quaderform mit der Länge a cm, Breite b cm und Dicke c mm werden runde Stücke vom Durchmesser 2 r zu Münzen gestanzt. Was wiegt der Abfall, wenn die Löcher voneinander und vom Rand gleichweit entfernt sind?

34. Ein Silberdraht von a m Länge und p g Gewicht soll mit q g Gold vergoldet werden. Wie dick ist der Silberdraht und wie dick die Vergoldung? (Dichte des Silbers $s = 10,5$, des Goldes $s' = 19,5$.)

35. Der Hauptachsenschnitt eines schiefen Cylinders ist ein Rhombus, dessen kürzere Diagonale d cm ist. Welchen Inhalt hat der Cylinder, wenn er h cm hoch ist?

36. Durch eine kreisförmige Scheibe aus Holz (Dichte s), welche den Halbmesser r cm und die Dicke d cm hat, ist eine eiserne cylindrische Welle (Dichte s') von der Länge a cm hindurchgesteckt. Welchen Durchmesser muß die Welle erhalten, wenn ihr Gewicht gleich dem der durchbohrten Scheibe werden soll?

37. Welche Arbeit ist zu leisten, um eine cylindrische eiserne Säule (Dichte s) vom Durchmesser d cm und der Höhe h cm umzuwerfen?

38. Einem regulären Oktaeder mit der Kante a cm ist ein quadratischer Cylinder so einbeschrieben, daß seine Grundkreise je vier Seitenflächen berühren. Gesucht Oberfläche und Volumen des Cylinders.

39. Der Mantel eines geraden Cylinders vom Halbmesser r cm ist viermal so groß als die Grundfläche. Welches Volumen hat das einbeschriebene reguläre dreiseitige Prisma?

40. Einem Bleicylinder (Dichte s) von h cm Höhe soll ein Holzcylinder (Dichte s') vom selben Durchmesser aufgesetzt werden, damit die ganze Säule in Oel (Dichte s") zur Hälfte einsinkt. Welche Höhe hat der hölzerne Cylinder?

41. Von einem Punkt der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks fälle man Senkrechte auf die Katheten; wo muß der Punkt liegen, damit das entstandene Rechteck bei der Umdrehung um eine Kathete den Cylinder a) vom größten Volumen, b) vom größten Mantel, c) von der größten Oberfläche giebt?

42. Von einem geraden Cylinder soll die Diagonale des Achsenschnitts d cm werden; wie groß wird die Höhe, damit der Inhalt möglichst groß werde? Welche Gestalt hat der Achsenschnitt?

43. Bestimme den Grundkreisdurchmesser und die Höhe eines geraden Cylinders, wenn er bei gleichbleibendem Volumen V die kleinste Gesamtoberfläche haben soll.

44. Einem Würfel soll ein gerader Cylinder einbeschrieben werden, so daß seine Achse in einer Diagonale des Würfels liege und seine Grundflächen die Würfelflächen berühren. Wie groß ist die Höhe dieses Cylinders, wenn dieselbe dem Achtfachen des Radius seiner Grundfläche gleich sein soll und wenn die Diagonale des Würfels d ist? Vergleiche die Volumina des Würfels und des Cylinders.

45. Berechne die Oberfläche eines regulären Tetraeders von der Höhe h cm.

46. Ueber einem geg. Dreieck, dessen Seiten a, b, c seien, als Grundfläche eine Pyramide zu errichten, deren Kanten an der Spitze senkrecht aufeinander stehen.

47. Aus einem Würfel mit der Kante a cm ist ein reguläres Tetraeder geschnitten, dessen Ecken die abwechselnden Ecken des Würfels sind. Gesucht die Oberfläche des Tetraeders.

48. In ein reguläres Tetraeder stelle man ein gerades dreiseitiges Prisma mit lauter gleichen Kanten, so daß die Ecken der einen Grundfläche in eine Tetraederfläche und die der anderen in die zur Gegenecke führenden Tetraederkanten fallen. Vergleiche die Volumina beider Körper.

49. Parallel zur Grundfläche einer geraden Pyramide einen Schnitt zu legen, so daß ein auf ihm errichtetes gerades Prisma, dessen andere Grundfläche mit der Grundfläche der Pyramide zusammenfällt, ein bestimmtes Volumen hat.

50. In ein reguläres Tetraeder einen quadratischen Cylinder zu stellen. Verhältnis der Volumina?

51. In eine gerade quadratische Pyramide einen Würfel zu stellen, dessen Deckfläche ein Parallelschnitt zur Grundfläche der Pyramide ist. Vergleiche die Inhalte und Oberflächen beider Körper.

52. In eine quadratische Pyramide den Quader a) vom größten Volumen, b) von der größten Summe der Seitenflächen, c) von der größten Oberfläche zu stellen.

53. In eine quadratische Pyramide eine andere quadratische Pyramide, deren Spitze in der Mitte der Grundfläche ersterer liegt, a) vom größten Volumen, b) von der größten Summe der Seitenflächen, c) von der größten Oberfläche zu stellen.
54. In ein reguläres Oktaeder einen quadratischen Quader a) vom größten Volumen, b) von der größten Summe der Seitenflächen, c) von der größten Oberfläche zu stellen.
55. In einem Quader mit den Kanten a, b, c sind von einer Ecke aus in den Rechtecken, welche in dieser Ecke zusammenstoßen, die Diagonalen gezogen und ihre Endpunkte verbunden. Gesucht Volumen und Oberfläche der entstehenden dreiseitigen Pyramide.
56. Eine quadratische Pyramide, welche die Grundkante a und die Seitenkante b hat, wird durch einen Parallelschnitt zur Grundfläche halbiert. Gesucht die Höhe des entstehenden Pyramidenstumpfs.
57. In einem Pyramidenstumpf, dessen Grundflächen das Verhältnis 16 : 1 haben, steht ein Prisma von gleicher Höhe, das mit dem Stumpf die kleinere Grundfläche gemein hat. Gesucht das Verhältnis der Inhalte beider Körper.
58. Von einem Würfel schneidet man durch Ebenen, welche durch die Mitten der Kanten gehen, die Ecken weg. Gesucht das Volumen des übrigbleibenden Körpers (Kubooktaeder).
59. Dieselbe Aufgabe fürs Oktaeder.
60. Eine Pyramide wiegt qmal soviel als ihre h m hohe Spitze, die durch einen Parallelschnitt zur Grundfläche abgeschnitten wird. Wie groß war die Höhe der Pyramide?
61. Aus vier Stäben von gleicher Länge a cm eine vierseitige Pyramide von quadratischer Grundfläche herzustellen, deren Inhalt am größten ist.
62. Berechne Volumen und Oberfläche der regulären Krystalle aus der Achse 2a.
63. In eine Kugel vom Halbmesser R eine gerade quadratische Pyramide zu beschreiben, deren Höhe viermal so groß ist als eine Grundkante. Gesucht Volumen und Oberfläche der Pyramide.
64. Fällt man von einem beliebigen Punkt im Innern einer dreiseitigen Pyramide die Lote auf die Flächen, so ist die Summe der vier Verhältnisse aus je einem Lot und der ihm parallelen Höhe gleich 1. Folgerung für das reguläre Tetraeder? (Benütze den Satz über das Verhältnis der Volumina von Pyramiden mit gleicher Grundfläche.)
65. Ist der Fußpunkt der Höhe einer dreiseitigen Pyramide der Höhenschnittpunkt der Grundfläche, so hat die Summe der Quadrate je zweier Gegenkanten für alle drei Paare denselben Wert.

Benütze den Hilfssatz über die Produkte der durch den Höhenschnittpunkt erzeugten Abschnitte der Höhen eines Dreiecks.
66. Gesucht der Inhalt der größten quadratischen Pyramide, die einer Kugel vom Halbmesser R eingeschrieben werden kann.

67. Aus einer Pyramide mit der Grundfläche G qcm und der Höhe h cm soll durch zwei Parallelschnitte zur Grundfläche ein Stück vom Inhalt J ccm und von der Höhe h cm geschnitten werden.
68. Vergleiche die Inhalte eines geraden Kegels und eines ihm einbeschriebenen Cylinders, dessen Mantel gleich der Hälfte des Kegelmantels ist.
69. Vergleiche den Inhalt eines geraden Kegels mit dem eines ihm einbeschriebenen Würfels bezw. quadratischen Cylinders.
70. Denjenigen Kegel zu errichten, der a) bei geg. Mantel das größte Volumen, b) bei geg. Volumen den kleinsten Mantel hat.
71. Stelle in einen geraden Kreiskegel den Kegel, dessen Spitze in der Mitte der Grundfläche liegt, vom größten Volumen oder größten Mantel oder von der größten Oberfläche.
72. Berechne die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels vom Inhalt K cbm.
73. Der Mantel eines rechtwinkligen Kegels beträgt M qcm. Gesucht sein Volumen.
74. Aus einem Kreis vom Halbmesser R einen Ausschnitt zu schneiden, der einen Trichter von größtem Rauminhalt liefert.
75. Zeichne den Grundkreishalbmesser eines Cylinders, dessen Mantel gleich demjenigen eines ebenso hohen Kegelstumpfs ist.
76. Ein quadratisches Stück Papier von der Seite a und ein Quadrant vom Halbmesser a werden zu einem geraden Cylinder bezw. Kegel gerollt. Wie verhalten sich die Rauminhalte?
77. Ein gleichseitiger Kegel hat mit einem quadratischen Cylinder gleiche Oberfläche. Wie verhalten sich die Volumina?
78. Welches ist der kleinere Halbmesser und der Zentriwinkel des Ringausschnitts, der zu einem Lampenschirm von der Gestalt eines Kegelstumpfs zusammenzurollen ist, wenn der Schirm oben d cm, unten D cm weit und die Seitenlinie s cm lang werden soll?
79. Ein gerader Kegelstumpf hat die Seite s und den Inhalt K. Die Seiten sind unter 45° gegen die Grundflächen geneigt. Gesucht die Halbmesser.
80. Wie tief sinkt ein h cm hoher Kegel (Dichte s), die Spitze lotrecht nach abwärts gerichtet, im Wasser ein? Bedingung $s \gtrless 1$.
81. Ein rechtwinkliges Dreieck rotiere je einmal um jede seiner drei Seiten. Wie verhalten sich die durch die Rotation entstehenden Kegel (Doppelkegel) zu einander, wenn eine Kathete b cm und ihr Gegenwinkel 30° beträgt?
82. Ein Cylinder vom Halbmesser r cm wird konisch so ausgebohrt, daß die Oeffnungen mit den Grundkreisen des Cylinders konzentrisch sind und sich wie m : n verhalten. Wie weit werden die Oeffnungen, wenn das Gewicht des durchbohrten Körpers die Hälfte des Gewichts des ganzen Cylinders betragen soll?

83. Aus einem hölzernen h cm langen Kegelstumpf mit den Dicken D cm und d cm an den Enden ist der größte quadratische Balken geschnitten. Wieviel Kilogramm wiegt der Holzabfall (Dichte s)?

84. In ein gerades reguläres sechsseitiges Prisma, das zum Teil mit Wasser gefüllt ist, wird eine die Seitenflächen berührende Kugel gelegt. Dieselbe werde vom Wasser ganz überdeckt. Um wieviel ist das Wasser gestiegen?

85. Dieselbe Aufgabe für einen geraden Kreiskegel mit der Spitze nach unten.

86. Eine Hohlkugel aus Holz (Dichte s), deren äußerer Durchmesser 2R ist, schwimmt im Wasser; der mte Teil wird benetzt. Wie groß ist die Dicke des Holzes?

87. Durch eine geg. Gerade soll eine Ebene so gelegt werden, daß sie eine geg. Kugel vom Halbmesser R nach einem Kugelkreis schneidet, dessen Fläche gleich der Oberfläche der die Ebene berührenden konzentrischen Kugel wird.

88. Eine Kugel vom Halbmesser R in einen geraden Cylinder zu verwandeln, dessen Mantel gleich der Oberfläche der Kugel ist. Gesucht Halbmesser und Höhe.

89. Von einem leuchtenden Punkt im Abstand e vom Mittelpunkt einer Kugel fällt ein Strahlenbündel auf dieselbe. Wie groß ist der nicht beleuchtete Teil der Kugelfläche?

90. Die Masse einer Halbkugel vom Halbmesser R wird auf die innere Oberfläche der ganzen Kugel gleichmäßig verteilt. Wie dick wird diese Schichte?

91. In eine Kugel zu stellen a) den Cylinder vom größten Volumen, b) vom größten Mantel, c) der größten Oberfläche; desgleichen einen geraden Kegel.

92. In eine Halbkugel einen Kegel zu stellen, dessen Spitze im Mittelpunkt liegt, damit sein Volumen ein Maximum werde.

93. In eine Halbkugel den Kegelstumpf vom größten Mantel zu stellen.

94. Welcher von allen einer Kugel umschriebenen Kegel hat a) das kleinste Volumen, b) den kleinsten Mantel, c) die kleinste Oberfläche. Vergleiche auch die Volumina.

95. In einen Kugelsektor einen Cylinder zu stellen a) vom größten Volumen, b) vom größten Mantel, c) von der größten Oberfläche.

96. Um einen Punkt einer Kugelfläche diejenige Kugel zu beschreiben, auf welcher die erste a) die größte Kalotte, b) den größten Kugelsektor bestimmt.

97. In dieselbe Kugel vom Halbmesser R lege man ein reguläres Tetraeder, einen regulären Würfel und ein reguläres Oktaeder. Vergleiche die Volumina.

98. Stelle einen Würfel in eine Halbkugel und vergleiche die Volumina.

99. In eine Kugel ist ein Würfel gestellt, in diesen eine Kugel, in diese wieder ein Würfel u. s. f. Vergleiche die Summe aller Kugeln mit derjenigen aller Würfel. Desgleichen für das Tetraeder und Oktaeder.

100. Um eine Kugel vom Halbmesser R beschreibe man das Tetraeder, das Hexaeder und das Oktaeder. Vergleiche die Oberflächen und Inhalte.
101. Um eine Kugel vom Halbmesser R einen geraden Kegelstumpf zu legen, so daß die Kugel die Grundflächen in den Mittelpunkten und die Kegelfläche in einem Kreis berührt und die Grundflächenhalbmesser ein bestimmtes Verhältnis m : n haben. Gesucht das Volumen.
102. Welche Fläche der Erde wird von der Höhe h m aus übersehen?
103. Aus einer Kugel vom Halbmesser R einen Sektor zu schneiden, dessen Kalotte gleich seiner Kegelfläche ist; dasselbe bezüglich der Inhalte.
104. Berechne die Oberflächen der Zonen der Erde.
105. Durch drei von einer Ecke auslaufende Kanten eines regulären Tetraeders (Würfels, Oktaeders) lege man einen Kegel. Bestimme das Volumen des Kugelsektors, zu dem dieser Kegel gehört.
106. In einen Kugelsektor einen quadratischen Cylinder zu stellen. Vergleiche die Volumina.
107. Vergleiche die Volumina eines Kugelsektors und des ihm einbeschriebenen Würfels.
108. Auf die Grundflächen eines quadratischen Cylinders vom Halbmesser r sind zwei gleiche Kugelklappen gesetzt, deren Mittelpunkte im Mittelpunkt des Cylinders liegen. Gesucht der Inhalt des ganzen Körpers.
109. Ueber der Grundfläche eines geraden Kegels mit dem Halbmesser r und der Höhe h ist eine Halbkugel errichtet. Gesucht die Fläche des Kreises, nach welchem sich der Kegelmantel und die Halbkugelfläche durchschneiden.
110. Eine Konkav-Konvex-Linse wird von einer konkaven Kugelfläche mit größerem und einer konvexen Kugelfläche mit kleinerem Halbmesser begrenzt. Die Dicke der Linse ist a cm, die Halbmesser sind R cm und r cm. Was wiegt die Linse (Dichte s)?
111. Vergleiche das Volumen einer fünfseitigen regulären geraden Pyramide von der Grundkante a cm und Höhe h cm mit demjenigen der einbeschriebenen Kugel.
112. In einen geraden Kegel vom Halbmesser r und der Höhe h ist eine Kugel beschrieben, in den Raum über der Kugel wieder eine Kugel, welche die erste Kugel und den Kegelmantel berührt u. s. f. bis zur Kegelspitze. Vergleiche das Volumen des Kegels mit dem der Summe aller Kugeln.
113. Einer Kugel vom Halbmesser R sind vier gleich große Kugeln einbeschrieben, die sich gegenseitig berühren. Wie groß ist jede Kugel?
114. Um zwei sich von außen berührende Kugeln mit den Halbmessern R und r ist ein Kegel beschrieben. Bestimme die Gesamtoberfläche und den Inhalt des von den Kugelflächen und dem berührenden Kegelstumpfmantel begrenzten Körpers.
115. Eine Kugel vom Halbmesser R wird durch eine Ebene so geschnitten, daß sich die Teile der Kugelfläche verhalten wie m : n. Wie groß sind die Inhalte der zugehörigen Kugelabschnitte?

116. Ueber einem Großkreis der Kugel vom Halbmesser R steht eine Kugelschicht, deren krumme Oberfläche gleich der Fläche des Großkreises ist. Welches Volumen hat die Schichte?

117. In welchem Abstand muß zu einem Großkreis einer Kugel vom Halbmesser R eine Parallelebene gelegt werden, damit die entstehende Zone qmal so groß wird als der Mantel des abgestumpften Kegels, der mit der Zone beide Grundflächen gemein hat?

118. Wie groß ist der Halbmesser einer eisernen Kugel von p kg Gewicht, damit dieselbe a cm tief in Quecksilber (Dichte s) eintaucht?

119. Eine gerade quadratische Pyramide durch eine Ebene, welche durch eine Grundkante gelegt wird, zu halbieren.

120. Ueber einem Rechteck von den Seiten a m und b m ist Kies aufgeschüttet, oben mit einer dem Rechteck parallelen Kante c m. Die Höhe des Haufens ist h m. Gesucht der Rauminhalt.

121. Ein gerades, schiefabgeschnittenes dreiseitiges Prisma als Unterschied eines geraden dreiseitigen Prismas und einer vierseitigen Pyramide zu berechnen aus der Grundfläche G qcm und den Seitenkanten a, b, c cm.

122. Wie groß ist der Dachraum eines Hauses, das a m lang, b m tief ist, dessen Dachfirst c m lang ist ($c < a$), wenn die Dachflächen in ihr einen Winkel von 60° bilden?

123. Berechne das Volumen eines regulären dreiseitigen Prismatoids von der Grundkante a und der Höhe h und bestimme den Unterschied bezüglich des über derselben Grundfläche errichteten gleich hohen Prismas. Berechne die Mantelfläche dieses Prismatoids.

124. Das Gewicht eines Obelisken aus Sandstein (Dichte s) zu bestimmen, dessen Grundfläche ein Quadrat mit der Seite a cm, dessen Deckfläche ein Rechteck von den Seiten b cm und c cm ist, wenn die Höhe h cm beträgt.

125. Bestimme das Gewicht eines h cm hohen Keils (Dichte s), dessen Grundfläche ein Quadrat von der Seite a cm, dessen Schneide parallel und gleich einer Diagonale der Grundfläche ist.

126. Das Volumen einer beliebigen dreiseitigen Pyramide zu bestimmen aus zwei Gegenkanten a und b, ihrem Winkel φ und ihrer kürzesten Entfernung k.

127. Berechne das Volumen eines regulären Tetraeders als Doppelkeil mit den beiden Schneiden a cm (krystallographische Stellung).

128. Berechne ein reguläres Oktaeder, das auf eine seiner Seitenflächen gestellt ist, als Prismatoid.

129. Zieht man im regulären Dodekaeder (von regulären Fünfecken umgrenzt) diejenigen Diagonalen der Seitenflächen, die den Hauptachsen parallel sind, so schließen dieselben einen Würfel ein, über dessen Flächen schief abgeschnittene dreiseitige Prismen liegen. Hiernach das Volumen zu berechnen.

130. Das reguläre Ikosaeder läßt sich betrachten als die Summe eines Prismatoids über regulärer fünfseitiger Grundfläche und zweier regulärer fünfseitiger Pyramiden. Hiernach das Volumen zu berechnen.

131. Das reguläre Rhombendodekaeder von dem einbeschriebenen Würfel bezw. Oktaeder ausgehend zu berechnen.

132. Verbindet man die Mitten sämtlicher Kanten eines regulären Tetraeders der Reihe nach, so sind diese Strecken die Kanten eines regulären Oktaeders. Vergleiche die Volumina beider Körper.

133. Gesucht der Inhalt eines Obelisken, dessen Höhe h cm ist, wenn die Grundflächen kongruente, sich rechtwinklig kreuzende Rechtecke von den Seiten a und b sind.

134. In einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist, steht eine Seitenkante auf der Grundfläche im Scheitel des rechten Winkels senkrecht. In welchem Verhältnis wird die ganze Pyramide durch eine Ebene geteilt, die senkrecht zur Grundfläche und parallel der Hypotenuse derselben so gelegt ist, daß die Katheten halbiert werden?

135. Wo liegt der Schwerpunkt einer mehrseitigen Pyramide, wenn man bemerkt, daß derselbe einerseits auf der von der Spitze nach dem Schwerpunkt der Grundfläche führenden Schwerlinie der Pyramide, andererseits in der Ebene liegen muß, in welcher die Schwerpunkte sämtlicher durch Diagonalschnitte erzeugten dreiseitigen Teilpyramiden liegen?

136. Teilt ein Parallelschnitt zur Grundfläche die Höhe eines Pyramidenstumpfs im Verhältnis $\sqrt{G}:\sqrt{G'}$, so daß der größere Abschnitt an die größere Grundfläche stößt, so ist die Schnittfläche $S = \sqrt{GG'}$. Stelle das Volumen des Pyramidenstumpfs als Summe dreier Pyramiden dar.

137. Wie wird eine reguläre quadratische Pyramide von einer Ebene geteilt, die durch eine Grundkante so gelegt ist, daß die gegenüberliegenden Seitenkanten nach dem goldenen Schnitt geteilt sind?

138. Werden zwei Körper von verschiedener Höhe von jedem Paar Ebenen, welche zu den bezüglichen Höhen senkrecht sind und dieselben im nämlichen Verhältnis teilen, nach gleichen Schnittflächen geschnitten, so verhalten sich die Rauminhalte beider Körper wie ihre Höhen.

139. Ein von zwei parallel liegenden Rechtecken mit den Seiten a m und b m bezw. a' und b' und von vier seitlichen Trapezen begrenzter Ponton von der Höhe h m wiegt p kg und schwimmt im Wasser mit der größeren Grundfläche nach oben. Mit wie viel kg darf man ihn höchstens belasten?

140. Wird ein Kreisabschnitt um einen beliebigen, ihn nicht schneidenden Durchmesser seines Kreises gedreht, so entsteht ein Umdrehungskörper, welcher sich zu der über der Sehne als Durchmesser beschriebenen Kugel verhält wie die Höhe des von der Sehne beschriebenen Kegelrumpfs zur Sehne.

141. Sind s und s' die Verbindungsstrecken des einen Endpunkts eines in der Deckfläche einer Kugelzone gezogenen Durchmessers mit den Endpunkten des zu ihm parallelen Durchmessers der Grundfläche, so ist $\pi s s'$ die gekrümmte Fläche der Zone.

142. Wie groß ist der Mantel eines Kegelstumpfs, der einer Kugel umschrieben ist, wenn die Seitenlinie s ist?

143. Dreht man ein beliebiges Dreieck um eine seiner Schwerlinien als Achse, so beschreiben die beiden Teile des Dreiecks gleichgroße Umdrehungskörper.

Die Inhalte der drei durch Drehung um die drei Schwerlinien erzeugten Rotationskörper verhalten sich wie die reziproken Werte der Schwerlinien.

144. Ein reguläres Sechseck von der Seite a cm rotiere a) um einen großen Durchmesser, b) um eine Seite. Berechne Inhalt und Oberfläche der entstehenden Körper.

145. An zwei Ecken A und B eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a sind aus dem Dreieck zwei gleiche sich berührende Kreissextanten ausgeschnitten. Berechne die Oberfläche und das Volumen des Körpers, der durch Umdrehung der Restfläche a) um die Seite AB, b) um die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, die gemeinschaftliche Tangente der Sextanten, entsteht.

146. Ein gleichseitiges Dreieck rotiert um eine Achse, welche durch eine Ecke geht und der Dreiecksebene angehört. Gesucht Oberfläche und Volumen des Umdrehungskörpers. Für welche Lage der Achse werden beide ein Maximum oder Minimum?

147. Ueber der Hypotenuse und den Katheten eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks beschreibe man Halbkreise, den über der Hypotenuse nach innen, die anderen nach außen. Die mondförmigen Figuren rotieren um die Hypotenuse. Gesucht Oberfläche und Volumen des Rotationskörpers.

148. In ein Rotationsellipsoid den Kreiscylinder vom größten Volumen zu legen.

149. Desgleichen den größten Cylinder, dessen Grundfläche eine Ellipse ist.

150. Um einen geraden Cylinder mit Halbmesser r und Höhe 2h das kleinste Rotationsellipsoid zu legen.

151. Denjenigen Cylinder zu errichten, um welchen das kleinste Rotationsellipsoid eine Kugel wird.

152. Um die Endpunkte der kürzeren Diagonale eines Rhombus von der Seite a und dem spitzen Winkel 60° sind mit der Seite a und um die beiden anderen Eckpunkte mit der doppelten Seite 2a Kreisbögen beschrieben, die ein ellipsenähnliches Oval miteinander einschließen. Bestimme die Inhalte der durch Drehung dieses Ovals um die eine und um die andere seiner Achsen entstehenden Rotationskörper.

153. Bestimme das Volumen eines Eies, das durch Drehung eines aus einem Halbkreis vom Halbmesser a und einer Halbellipse mit den Halbachsen a und $b > a$ gebildeten Ovals um die größere Achse entsteht.

154. Beschreibe um die Spitze eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks den Quadranten über der Hypotenuse 2a und über den Katheten die Halbkreise nach außen. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die von diesen Kreisen umschlossene Fläche sich um die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks dreht.

155. Dieselbe Aufgabe, nur nehme man statt des Quadranten die ihn zum Kreis ergänzenden drei anderen Quadranten.

156. Beschreibe um die Eckpunkte der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Winkel $36°$ an der Spitze die zu den Winkeln der Grundseite gehörigen Sektorbögen vom Halbmesser a gleich der halben Grundseite und verbinde ihre durch die Schenkel des Dreiecks bestimmten Endpunkte durch den um die Spitze des Dreiecks beschriebenen außerhalb desselben liegenden Kreisbogen. Gesucht das Volumen des Umdrehungskörpers, der entsteht, wenn die von diesen Kreisbögen umschlossene Fläche sich um die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks dreht.

157. Das Volumen des zwischen dem Grundkreis und einem Wechselschnitt liegenden Stückes eines Cylinders zu finden aus dem Halbmesser des Grundkreises r und der Höhe h des Mittelpunkts des Wechselschnitts.

158. Ein Kegel vom Grundkreishalbmesser r ist durch einen Wechselschnitt abgestumpft. Das Volumen des Stumpfs zu finden, wenn r' der Halbmesser des Wechselschnitts und h der Abstand seines Schnittpunkts mit der Mittellinie von der Grundfläche ist.

159. Eine Kugel vom Halbmesser R wird von einem Cylinder durchdrungen, in welchem eine Mantellinie ein Kugeldurchmesser, die diametral gegenüberliegende zum Punkt zusammengeschrumpft ist. Wie groß ist die erzeugte Höhlung?

160. Um welche Strecke ist eine Seitenkante eines regulären dreiseitigen geraden Prismas zu verlängern, damit die durch den Endpunkt und die gegenüberliegende Kante der Grundfläche gelegte Ebene das Volumen des Prismas im Verhältnis $m : n$ teilt.

161. Parallel dem Durchmesser 2r eines Halbkreises eine Sehne zu ziehen, damit, bei Umdrehung um den Durchmesser, der vom Segment beschriebene Ring dem Körper raumgleich werde, der das über der Sehne als Grundseite stehende gleichschenklige Dreieck, dessen Spitze der Kreismittelpunkt ist, zur erzeugenden Fläche hat.

162. Die Grundkreise eines geraden Cylinders berühren die sechs Würfelflächen in deren Mittelpunkten. Vergleiche die Volumina und Oberflächen beider Körper.

163. In ein Oktaeder sind zwei Cylinder einbeschrieben. Der eine berührt mit seinen Grundkreisen die Oktaederflächen in deren Mittelpunkten, der andere in den Mitten der Höhen, die in den seitlichen Dreiecken von den Spitzen des Oktaeders ausgezogen sind. Vergleiche beide Cylinder bezüglich ihrer Oberflächen und Inhalte.

164. Auf dem Boden eines Würfels liegen vier gleichgroße Kugeln, deren jede drei Würfelflächen und die beiden Nachbarkugeln berührt. Auf ihnen ruht eine fünfte Kugel, welche die Deckfläche berührt. Vergleiche ihr Volumen mit dem der anderen Kugeln.

165. In einem Würfel liegen zwei gleiche Kugeln, von denen jede die andere und je drei Würfelflächen berührt. Vergleiche ihr Volumen mit demjenigen der umschriebenen Kugel des Würfels.

166. In einem regulären Tetraeder von der Kante a liegen vier gleiche Kugeln, die sich untereinander und je drei Seitenflächen berühren. In dem Raum zwischen diesen vier Kugeln befindet sich eine weitere Berührungskugel und um die vier ersten Kugeln eine Umhüllungskugel. Vergleiche die Inhalte dieser Kugeln mit demjenigen der einbeschriebenen und umschriebenen Kugel des Tetraeders.

Berichtigung. Der in Fig. 79 mit β bezeichnete Winkel ist nicht der gegebene, sondern muß gemäß 92b erst ermittelt werden als Außenwinkel eines durch die Seitenkante, ihre H.P. und den Gegenwinkel derselben, den geg. Winkel ∢ β, bestimmten Dreiecks.

Häufig gebrauchte Zahlenwerte.

$x = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{x} = 1{,}414$	1,732	2	2,236	2,449	2,646	2,828	3	3,162
$\sqrt[3]{x} = 1{,}260$	1,442	1,587	1,710	1,817	1,913	2	2,080	2,154

$\pi = 3{,}1416$ $\quad \frac{1}{\pi} = 0{,}3183$ $\quad \sqrt{\pi} = 1{,}7724$ $\quad \sqrt[3]{\pi} = 1{,}4646$

$\pi^2 = 9{,}8696$ $\quad \frac{1}{\pi^2} = 0{,}1013$ $\quad \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}5642$ $\quad \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0{,}6828$

Tafel der Dichten (spezifische Gewichte).

Wasser	1	Holz (eichen, trocken)	0,8
Blei	11,4	Kupfer	8,8
Eisen (Guß-)	7,25	Marmor	2,7
Eisen (Schmied-)	7,8	Messing	8,4
Glas (gemein)	2,6	Platin	21,5
Glas (Krystall)	3	Quecksilber	13,6
Gold	19,5	Silber	10,5
Granit	3	Sandstein	2,5
Holz (Kork)	0,25	Zink	7,2
Holz (tannen, trocken)	0,5	Zinn	7,3

Dimensionen der Erde.

Die Erde als Sphäroid (Rotationsellipsoid) betrachtet, ist

Die halbe große Achse (Halbmesser des Aequators)	=	6377400 m
Die halbe kleine Achse	=	6356100 „
Der Halbmesser der raumgleichen Erdkugel	=	6370280 „
Der Meridianquadrant	=	10000860 „
Ein Meridiangrad hat ungefähr die Länge	=	111 km
Eine geographische Meile = $\frac{1}{15}^{0}$ des Aequators	=	7420,5 m

Druck der Union Deutsche Verlagsgesellschaft in Stuttgart.

HS

